绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅰ卷)

数学(理科)

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡相应位置上。

2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

（1）已知集合 $A=\{x|x^2-2x>0\}$，$B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，则

（A）$A\cap B=\Phi$　（B）$A\cup B=\mathbf{R}$　（C）$B\subseteq A$　（D）$A\subseteq B$

（2）若复数 z 满足 $(3-4i)z=|4+3i|$

（A）-4　（B）$-\frac{4}{5}$　（C）4　（D）$\frac{4}{5}$

（3）为了解某地区中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已经了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大.在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是

（A）简单的随机抽样　（B）按性别分层抽样

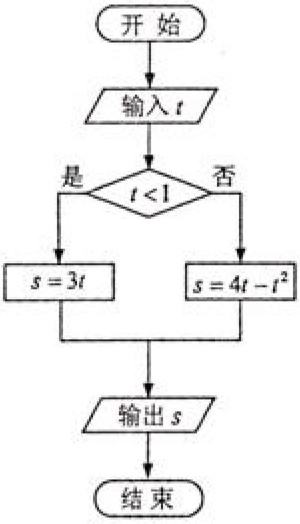
（C）按学段分层抽样　（D）系统抽样

（4）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 C 的渐近线方程为

（A）$y=\pm\frac{1}{4}x$　（B）$y=\pm\frac{1}{3}x$　（C）$y=\pm\frac{1}{2}x$　（D）$y=\pm x$

（5）执行右面的程序框图，如果输入的 $t\in[-1,3]$，则输出的 s 属于

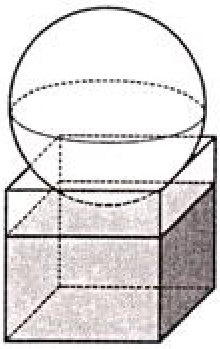
（A）$[-3,4]$　（B）$[-5,2]$　（C）$[-4,3]$　（D）$[-2,5]$



（6）如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8 cm，将一个球放在容器口，再向容器注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm，如不计容器的厚度，则球的体积为

（A）$\frac{500\pi}{3}\text{cm}^3$　　（B）$\frac{866\pi}{3}\text{cm}^3$

（C）$\frac{1372\pi}{3}\text{cm}^3$　　（D）$\frac{2048\pi}{3}\text{cm}^3$



（7）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则$m=$

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

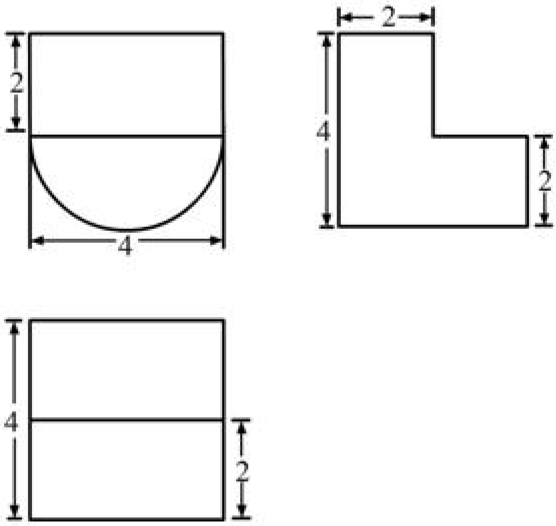
（8）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

（A）$16+8\pi$

（B）$8+8\pi$

（C）$16+16\pi$

（D）$8+16\pi$



（9）设 m 为正整数，$(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a，$(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b，若 $13a=7b$，则 $m=$

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

（10）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点。若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为

（A）$\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

（11）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x\ ,\leq 0\\ \ln(x+1),x>0\end{cases}$，若 $|f(x)|\geq ax$，则 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$(-\infty,1]$　　（C）$[-2,1]$　　（D）$[-2,0]$

（12）设△ $A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n，b_n，c_n，△ $A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n，$n=1,2,3\cdots\cdots$

若 $b_1>c_1$，$b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$，则

（A）$\{S_n\}$ 为递减数列

（B）$\{S_n\}$ 为递增数列

（C）$\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列，$\{S_{2n}\}$ 为递减数列

（D）$\{S_{2n-1}\}$为递减数列，$\{S_{2n}\}$为递增数列

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第13题~第21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22题~第24题为选考题，考生依据要求作答。

二. 填空题：本大题共4小题，每小题5分.

（13）已知两个单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，$\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$. 若$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$=0，则

t=____________.

（14）若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_{\text{n}}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_{\text{n}}$=____________.

（15）设当$x=\theta$时，函数$f(x)=\sin x-2\cos x$取得最大值，则$\cos\theta$=____________.

（16）若函数$f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$的图像关于直线$x=-2$对称，则$f(x)$的最大值为____________.

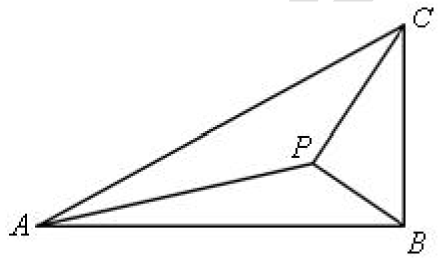
三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分12分）

如图，在△ABC中，$\angle ABC$＝90°，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P为△ABC内一点，$\angle BPC$＝90°

（Ⅰ）若$PB=\frac{1}{2}$，求PA；

（Ⅱ）若$\angle APB$＝150°，求$\tan\angle PBA$.

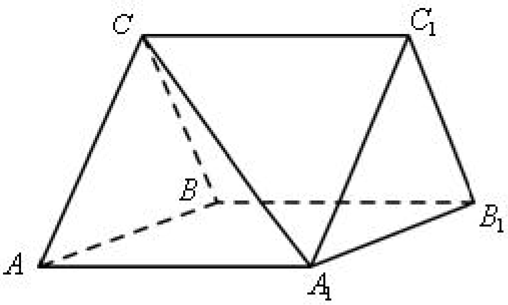


（18）（本小题满分12分）

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CA=CB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1$=60°.

（Ⅰ）证明$AB\perp A_1C$；

（Ⅱ）若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B， $AB=CB$，求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值。



（19）（本小题满分 12 分）

一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件作检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$，再从这批产品中任取 4 件作检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 $n=4$，再从这批产品中任取 1 件作检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验.

假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立.

（Ⅰ）求这批产品通过检验的概率；

（Ⅱ）已知每件产品检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品作质量检验所需的费用记为 X（单位：元），求 X 的分布列及数学期望。

（20）（本小题满分 12 分）

已知圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）l 是与圆 P，圆 M 都相切的一条直线，l 与曲线 C 交于 A，B 两点，当圆 P 的半径最长时，求 $|AB|$.

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$ 若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.

（Ⅰ）求 a，b，c，d 的值；

（Ⅱ）若 $x \geq -2$ 时，$f(x) \leq kg(x)$，求 k 的取值范围.

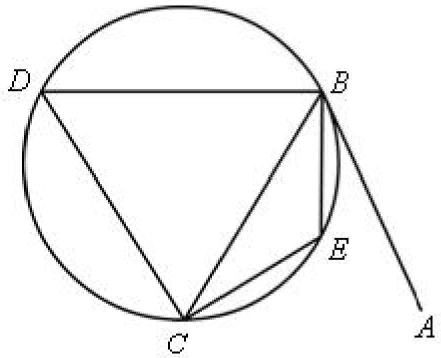
请考生在第 22、23、24 题中任选一道作答，并用 2B 铅笔将答题卡上所选的题目对应的题号右侧方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分，不涂，按本选考题的首题进行评分.

（22）（本小题满分 10 分）选修 4—1：几何证明选讲

如图，直线 AB 为圆的切线，切点为 B，点 C 在圆上，$\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E，DB 垂直 BE 交圆于 D.

（Ⅰ）证明：$DB=DC$；

（Ⅱ）设圆的半径为 1，$BC=\sqrt{3}$，延长 CE 交 AB 于点 F，求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



（23）（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程式 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

（Ⅰ）把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；

（Ⅱ）求 C_1 与 C_2 交点的极坐标（$\rho \geq 0$，$0 \leq \theta < 2\pi$）

（24）（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$.

（Ⅰ）当 $a=-2$ 时，求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集；

（Ⅱ）设 $a>-1$，且当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)\le g(x)$，求 a 的取值范围.

2013年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学答案

一．选择题

（1）B　（2）D　（3）C　（4）C　（5）A　（6）A

（7）C　（8）A　（9）B　（10）D　（11）D　（12）B

二．填空题

（13）2　（14）$(-2)^{n-1}$　（15）$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　（16）16

三．解答题

（17）解：

（Ⅰ）由已知得，$\angle PBC=60°$，所以$\angle PBA=30°$.

在$\triangle PBA$中，由余弦定理得$PA^2=3+\frac{1}{4}-2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\cos30°=\frac{7}{4}$.

故$PA=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

（Ⅱ）设$\angle PBA=\alpha$，由已知得 $PB=\sin\alpha$.

在$\triangle PBA$中，由正弦定理得 $\frac{\sqrt{3}}{\sin150°}=\frac{\sin\alpha}{\sin(30°-\alpha)}$，化简得$\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin\alpha$.

所以$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即$\tan\angle PBA=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

（18）解：

（Ⅰ）取AB的中点O，连结OC，OA_1，A_1B.

因为$CA=CB$，所以$OC\perp AB$.

由于$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$，故$\triangle AA_1B$为等边三角形，所以$OA_1\perp AB$.

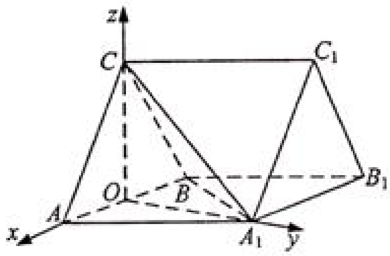
因为$OC\cap OA_1=O$，所以$AB\perp$平面OA_1C.

又$A_1C\subset$平面OA_1C，故$AB\perp A_1C$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $OC\perp AB$，$OA_1\perp AB$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，交线为 AB，所以 $OC\perp$ 平面 AA_1B_1B，故 OA，OA_1，OC 两两相互垂直.

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



由题设知 $A(1,0,0)$，$A_1(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$B(-1,0,0)$.

则 $\overrightarrow{BC}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BB_1C_1C 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$.

故 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

所以 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

（19）解：

（Ⅰ）设第一次取出的4件产品中恰有3件优质品为事件 A_1，第一次取出的4件产品全是优质品为事件 A_2，第二次取出的4件产品都是优质品为事件 B_1，第二次取出的1件产品是优质品为事件 B_2，这批产品通过检验为事件 A，依题意有 $A=(A_1B_1)\cup(A_2B_2)$，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)\\&=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)\\&=\frac{4}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{64}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）X 可能的取值为400，500，800，并且

$P(X=400)=1-\dfrac{4}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{11}{16}$，$P(X=500)=\dfrac{1}{16}$，$P(X=800)=\dfrac{1}{4}$.

所以 X 的分布列为

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

$EX=400\times\dfrac{11}{16}+500\times\dfrac{1}{16}+800\times\dfrac{1}{4}=506.25$.

（20）解：

由已知得圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径 $r_1=1$；圆 N 的圆心为 $N(1,0)$，半径 $r_2=3$．设圆 P 的圆心为 $P(x,y)$，半径为 R．

（Ⅰ）因为圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，所以

$|PM|+|PN|=(R+r_1)+(r_2-R)=r_1+r_2=4$．

由椭圆的定义可知，曲线 C 是以 M,N 为左、右焦点，长半轴长为 2，短半轴长为 $\sqrt{3}$ 的椭圆（左顶点除外），其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\ (x\neq-2)$．

（Ⅱ）对于曲线 C 上任意一点 $P(x,y)$，由于 $|PM|-|PN|=2R-2\leqslant2$，所以 $R\leqslant2$，当且仅当圆 P 的圆心为 $(2,0)$ 时，$R=2$．所以当圆 P 的半径最长时，其方程为

$$(x-2)^2+y^2=4．$$

若 l 的倾斜角为 $90°$，则 l 与 y 轴重合，可得 $|AB|=2\sqrt{3}$．

若 l 的倾斜角不为 $90°$，由 $r_1\neq R$ 知 l 不平行于 x 轴，设 l 与 x 轴的交点为 Q，则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$，可求得 $Q(-4,0)$，所以可设 l: $y=k(x+4)$．由 l 与圆 M 相切得 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$．

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，将 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，并整理得 $7x^2+8x-8=0$，

解得　$x_{1,2}=\frac{-4\pm6\sqrt{2}}{7}$．所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\frac{18}{7}$．

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，由图形的对称性可知 $|AB|=\frac{18}{7}$．

综上，$|AB|=2\sqrt{3}$ 或 $|AB|=\frac{18}{7}$．

（21）解：

（Ⅰ）由已知得 $f(0)=2,\ g(0)=2,\ f'(0)=4,\ g'(0)=4$．

而 $f'(x)=2x+a,\ g'(x)=e^x(cx+d+c)$，故

$$b=2,d=2,a=4,d+c=4．$$

从而 $a=4,b=2,c=2,d=2$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=x^2+4x+2,\ g(x)=2e^x(x+1)$．

设函数 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2$，则

$F'(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$．

由题设可得 $F(0)\geqslant0$，即 $k\geqslant1$．

令 $F'(x)=0$ 得　$x_1=-\ln k,\ x_2=-2$．

（ⅰ）若$1\leqslant k<e^2$，则$-2<x_1\leqslant 0$．从而当$x\in(-2,x_1)$时，$F'(x)<0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$F'(x)>0$．即$F(x)$在$(-2,x_1)$单调递减，在$(x_1,+\infty)$单调递增．故$F(x)$在$[-2,+\infty)$的最小值为$F(x_1)$．而

$$F(x_1)=2x_1+2-x_1^2-4x_1-2=-x_1(x_1+2)\geqslant 0.$$

故当$x\geqslant -2$时，$F(x)\geqslant 0$，即$f(x)\leqslant kg(x)$恒成立.

（ⅱ）若$k=e^2$，则$F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})$．从而当$x>-2$时，$F'(x)>0$，即$F(x)$在$(-2,+\infty)$单调递增．而$F(-2)=0$，故当$x\geqslant -2$时，$F(x)\geqslant 0$，即$f(x)\leqslant kg(x)$恒成立.

（ⅲ）若$k>e^2$，则$F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^2)<0$．从而当$x\geqslant -2$时，$f(x)\leqslant kg(x)$不可能恒成立.

综上，k的取值范围是$[1,e^2]$．

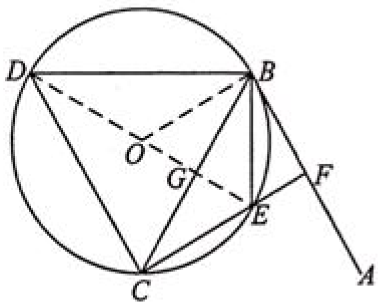
（22）解：

（Ⅰ）连结DE，交BC于点G.

由弦切角定理得，$\angle ABE=\angle BCE$．

而$\angle ABE=\angle CBE$，故$\angle CBE=\angle BCE$，$BE=CE$．

又因为$DB\perp BE$，所以DE为直径，$\angle DCE=90°$，由勾股定理可得$DB=DC$．



（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\angle CDE=\angle BDE$，$DB=DC$，故DG是BC的中垂线，所以$BG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

设DE的中点为O，连结BO，则$\angle BOG=60°$．从而$\angle ABE=\angle BCE=\angle CBE=30°$，所以$CF\perp BF$，故Rt$\triangle BCF$外接圆的半径等于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（23）解：

（Ⅰ）将$\begin{cases}x=4+5\cos t,\\ y=5+5\sin t\end{cases}$消去参数$t$，化为普通方程$(x-4)^2+(y-5)^2=25$，

即　C_1：$x^2+y^2-8x-10y+16=0$．

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$x^2+y^2-8x-10y+16=0$得

$$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0.$$

所以C_1的极坐标方程为

$$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0.$$

（Ⅱ）C_2 的普通方程为 $x^2+y^2-2y=0$.

由 $\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+16=0, \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$

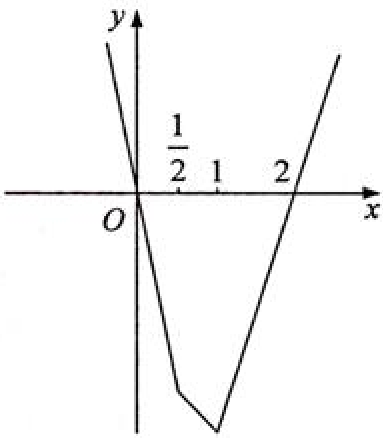
所以 C_1 与 C_2 交点的极坐标分别为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$，$(2, \frac{\pi}{2})$.

（24）解：

（Ⅰ）当 $a=-2$ 时，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$.

设函数 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，则

$$y=\begin{cases} -5x, & x<\frac{1}{2}, \\ -x-2, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \\ 3x-6, & x>1. \end{cases}$$



其图像如图所示. 从图像可知，当且仅当 $x\in(0,2)$ 时，$y<0$. 所以原不等式的解集是 $\{x|0<x<2\}$.

（Ⅱ）当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)=1+a$.

不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 化为 $1+a\leqslant x+3$.

所以 $x\geqslant a-2$ 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 都成立. 故 $-\frac{a}{2}\geqslant a-2$，即 $a\leqslant\frac{4}{3}$.

从而 a 的取值范围是 $(-1,\frac{4}{3}]$.