

2014 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

适用地区：河南 河北 山西

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分）

1. (5 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-2, -1]$ B. $[-1, 2)$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 2)$

2. (5 分) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} =$ ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

3. (5 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 \mathbb{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数
 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

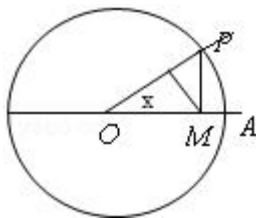
4. (5 分) 已知 F 为双曲线 $C: x^2 - my^2 = 3m$ ($m > 0$) 的一个焦点, 则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3}m$ D. $3m$

5. (5 分) 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ()

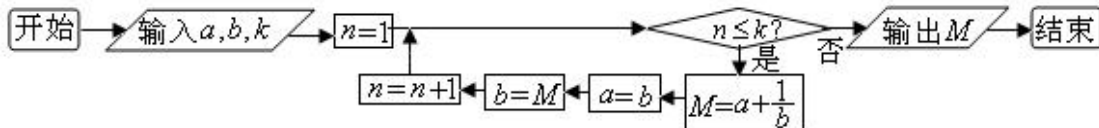
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

6. (5 分) 如图, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA , 终边为射线 OP , 过点 P 做直线 OA 的垂线, 垂足为 M , 将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的图象大致为 ()



- A. B. C. D.

7. (5分) 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M = (\quad)$



- A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{15}{8}$

8. (5分) 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$, 则 ()

- A. $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ C. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ D. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

9. (5分) 不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的解集记为 D , 有下列四个命题:

$p_1: \forall (x, y) \in D, x+2y \geq -2$ $p_2: \exists (x, y) \in D, x+2y \geq 2$

$p_3: \forall (x, y) \in D, x+2y \leq 3$ $p_4: \exists (x, y) \in D, x+2y \leq -1$

其中真命题是 ()

- A. p_2, p_3 B. p_1, p_4 C. p_1, p_2 D. p_1, p_3

10. (5分) 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 是 l 上一点, Q 是直线 PF 与 C 的一个交点, 若 $\overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ}$, 则 $|QF| = (\quad)$

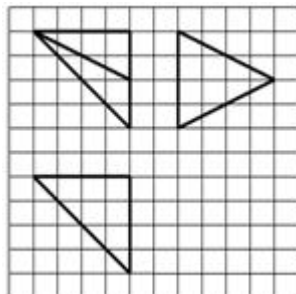
- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

11. (5分) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, -1)$

12. (5分) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ()

- A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $4\sqrt{2}$ D. 4



二、填空题（共4小题，每小题5分）

13. (5分) $(x - y)(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为_____。（用数字填写答案）

14. (5分) 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为_____。

15. (5分) 已知 A, B, C 为圆 O 上的三点，若 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ ，则 \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为_____。

16. (5分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边， $a=2$ ，且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c - b)\sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____。

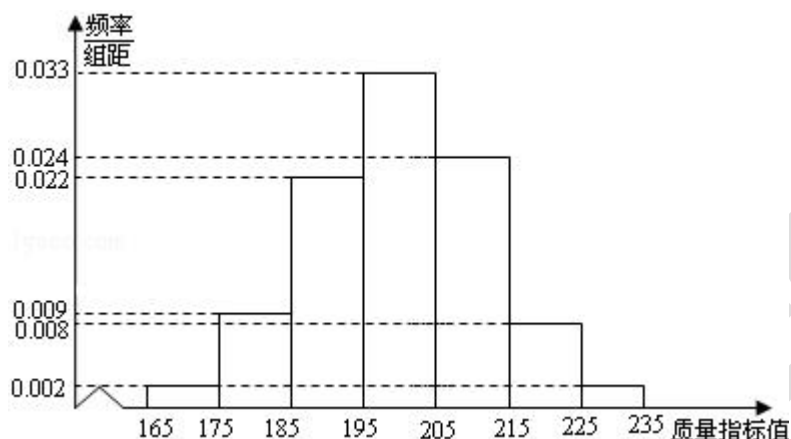
三、解答题

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1=1$ ， $a_n \neq 0$ ， $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$ ，其中 λ 为常数。

(I) 证明： $a_{n+2} - a_n = \lambda$

(II) 是否存在 λ ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列？并说明理由。

18. (12分) 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(I) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 \bar{x} 和样本方差 s^2 (同一组中数据用该组区间的中点值作代表);

(II) 由直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} , σ^2 近似为样本方差 s^2 .

(i) 利用该正态分布, 求 $P(187.8 < Z < 212.2)$;

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的产品件数, 利用 (i) 的结果, 求 EX .

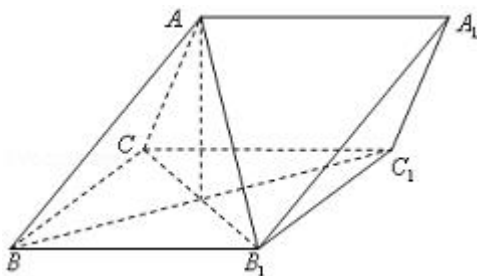
附: $\sqrt{150} \approx 12.2$.

若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

19. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB \perp B_1C$.

(I) 证明: $AC = AB_1$;

(II) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $AB = BC$, 求二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值.



20. (12分) 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆 E 的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(I) 求 E 的方程;

(II) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

21. (12分) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处得切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(I) 求 a, b ;

(II) 证明: $f(x) > 1$.

四、选做题 (22-24 题任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分)

选修 4-4: 坐标系与参数方程

23. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 $l: \begin{cases} x=2+t \\ y=2-2t \end{cases}$ (t 为参数)

(I) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程.

(II) 过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A , 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

选修 4-5: 不等式选讲

24. 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$.

(I) 求 $a^3 + b^3$ 的最小值;

(II) 是否存在 a, b , 使得 $2a + 3b = 6$? 并说明理由.

苍瑞教育

2014 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分）

1. (5 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-2, -1]$ B. $[-1, 2)$ C. $[-1, 1]$ D. $[1, 2)$

考点: 交集及其运算.

专题: 集合.

分析: 根据集合的基本运算即可得到结论.

解答: 解: $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\} = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 2\}$,
则 $A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq -1\}$,
故选: A

点评: 本题主要考查集合的基本运算, 比较基础.

2. (5 分) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} =$ ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

考点: 复数代数形式的乘除运算.

专题: 数系的扩充和复数.

分析: 由条件利用两个复数代数形式的乘除法, 虚数单位 i 的幂运算性质, 计算求得结果.

解答: 解: $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} = \frac{2i(1+i)}{-2i} = -(1+i) = -1-i$,

故选: D.

点评: 本题主要考查两个复数代数形式的乘除法, 虚数单位 i 的幂运算性质, 属于基础题.

3. (5 分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 \mathbb{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $f(x)g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数 C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

考点: 函数奇偶性的判断; 函数的定义域及其求法.

专题: 函数的性质及应用.

分析：由题意可得， $|f(x)|$ 为偶函数， $|g(x)|$ 为偶函数．再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积还是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，从而得出结论．

解答：解： $\because f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数， $\therefore |f(x)|$ 为偶函数， $|g(x)|$ 为偶函数．

再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积还是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，可得 $f(x)|g(x)|$ 为奇函数，

故选：C．

点评：本题主要考查函数的奇偶性，注意利用函数的奇偶性规律，属于基础题．

4. (5分) 已知F为双曲线C: $x^2 - my^2 = 3m$ ($m > 0$)的一个焦点，则点F到C的一条渐近线的距离为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3m}$ D. 3m

考点：双曲线的简单性质．

专题：计算题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：双曲线方程化为标准方程，求出焦点坐标，一条渐近线方程，利用点到直线的距离公式，可得结论．

解答：

解：双曲线C: $x^2 - my^2 = 3m$ ($m > 0$)可化为 $\frac{x^2}{3m} - \frac{y^2}{3} = 1$ ，

\therefore 一个焦点为 $(\sqrt{3m+3}, 0)$ ，一条渐近线方程为 $x + \sqrt{m}y = 0$ ，

\therefore 点F到C的一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}} = \sqrt{3}$ ．

故选：A．

点评：本题考查双曲线的方程与性质，考查点到直线的距离公式，属于基础题．

5. (5分) 4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

考点：等可能事件的概率．

专题：计算题；概率与统计．

分析：求得4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可．

解答：解：4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4 = 16$ 种情况，

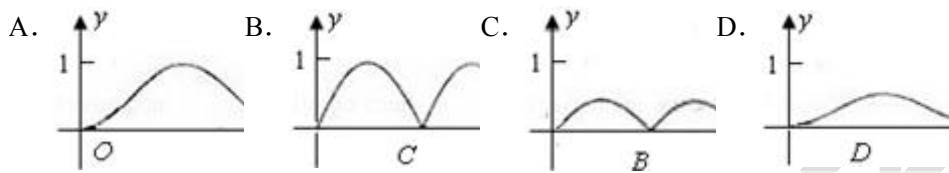
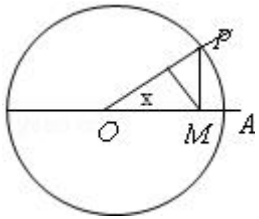
周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$ 种情况，

\therefore 所求概率为 $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$ ．

故选：D．

点评：本题考查古典概型，是一个古典概型与排列组合结合的问题，解题时先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件A包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数．

6. (5分) 如图, 圆 O 的半径为 1, A 是圆上的定点, P 是圆上的动点, 角 x 的始边为射线 OA , 终边为射线 OP , 过点 P 做直线 OA 的垂线, 垂足为 M , 将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的图象大致为 ()



考点: 抽象函数及其应用.

专题: 三角函数的图像与性质.

分析: 在直角三角形 OMP 中, 求出 OM , 注意长度、距离为正, 再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到 $f(x)$ 的表达式, 然后化简, 分析周期和最大值, 结合图象正确选择.

解答: 解: 在直角三角形 OMP 中, $OP=1$, $\angle POM=x$, 则 $OM=|\cos x|$,

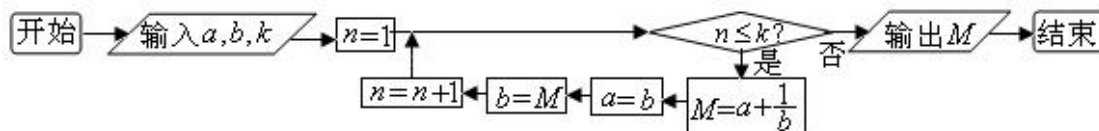
$$\begin{aligned} \therefore \text{点 } M \text{ 到直线 } OP \text{ 的距离表示为 } x \text{ 的函数 } f(x) &= OM|\sin x| \\ &= |\cos x| \cdot |\sin x| = \frac{1}{2} |\sin 2x|, \end{aligned}$$

其周期为 $T = \frac{\pi}{2}$, 最大值为 $\frac{1}{2}$, 最小值为 0,

故选 C.

点评: 本题主要考查三角函数的图象与性质, 正确表示函数的表达式是解题的关键, 同时考查二倍角公式的运用.

7. (5分) 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M = ()$



- A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{15}{8}$

考点: 程序框图.

专题: 概率与统计.

分析: 根据框图的流程模拟运行程序, 直到不满足条件, 计算输出 M 的值.

解答: 解: 由程序框图知: 第一次循环 $M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $a=2$, $b=\frac{3}{2}$, $n=2$;

第二次循环 $M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{8}{3}$, $n=3$;

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$, $a=\frac{8}{3}$, $b=\frac{15}{8}$, $n=4$.

不满足条件 $n \leq 3$, 跳出循环体, 输出 $M=\frac{15}{8}$.

故选: D.

点评: 本题考查了当型循环结构的程序框图, 根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法.

8. (5分) 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\tan \alpha = \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta}$, 则 ()

A. $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

B. $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

C. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

D. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

考点: 三角函数的化简求值.

专题: 三角函数的求值.

分析: 化切为弦, 整理后得到 $\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha$, 由该等式左右两边角的关系可排除选项 A, B, 然后验证 C 满足等式 $\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha$, 则答案可求.

解答: 解: 由 $\tan \alpha = \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta}$, 得:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta},$$

$$\text{即 } \sin \alpha \cos \beta = \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha.$$

由等式右边为单角 α , 左边为角 α 与 β 的差, 可知 β 与 2α 有关.

排除选项 A, B 后验证 C,

$$\text{当 } 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \sin(\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \text{ 成立.}$$

故选: C.

点评: 本题考查三角函数的化简求值, 训练了利用排除法及验证法求解选择题, 是基础题.

9. (5分) 不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的解集记为 D, 有下列四个命题:

$p_1: \forall (x, y) \in D, x+2y \geq -2$

$p_2: \exists (x, y) \in D, x+2y \geq 2$

$p_3: \forall (x, y) \in D, x+2y \leq 3$

$p_4: \exists (x, y) \in D, x+2y \leq -1$

其中真命题是 ()

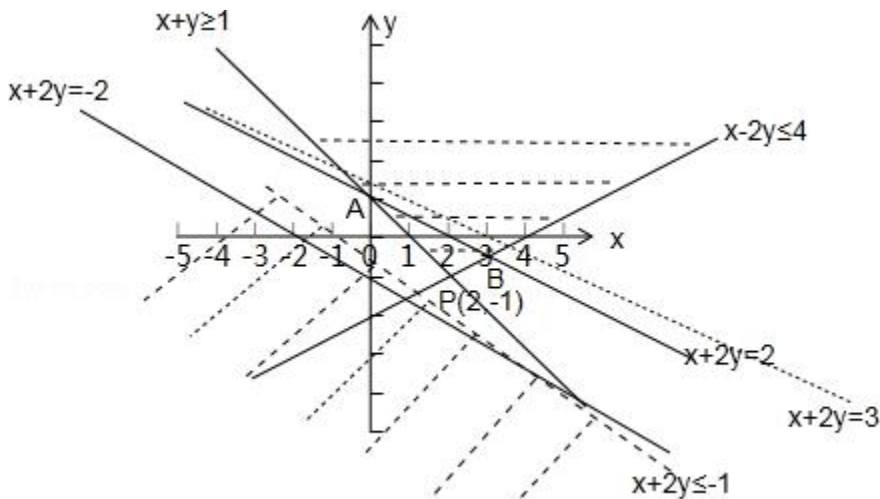
- A. p_2, p_3 B. p_1, p_4 C. p_1, p_2 D. p_1, p_3

考点：命题的真假判断与应用.

专题：不等式的解法及应用.

分析：作出不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的表示的区域 D，对四个选项逐一分析即可.

解答：解：作出图形如下：



由图知，区域 D 为直线 $x+y=1$ 与 $x-2y=4$ 相交的上部角型区域，

显然，区域 D 在 $x+2y \geq -2$ 区域的上方，故 A: $\forall (x, y) \in D, x+2y \geq -2$ 成立；

在直线 $x+2y=2$ 的右上方区域， $\therefore \exists (x, y) \in D, x+2y \geq 2$ ，故 $p_2: \exists (x, y) \in D, x+2y \geq 2$ 正确；

由图知， $p_3: \forall (x, y) \in D, x+2y \leq 3$ 错误；

$x+2y \leq -1$ 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域 D 下方，故 $p_4: \exists (x, y) \in D, x+2y \leq -1$ 错误；

综上所述， p_1, p_2 正确；

故选：C.

点评：本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题.

10. (5分) 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$ ，则 $|QF|$ = ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

考点：抛物线的简单性质.

专题：计算题；圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析：求得直线 PF 的方程，与 $y^2=8x$ 联立可得 $x=1$ ，利用 $|QF|=d$ 可求.

解答：解：设 Q 到 l 的距离为 d，则 $|QF|=d$ ，

$$\therefore \overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ},$$

$$\therefore |PQ|=3d,$$

$$\therefore \text{直线 PF 的斜率为 } -2\sqrt{2},$$

$$\therefore F(2, 0),$$

$$\therefore \text{直线 PF 的方程为 } y = -2\sqrt{2}(x - 2),$$

与 $y^2=8x$ 联立可得 $x=1$,

$$\therefore |QF|=d=1+2=3,$$

故选：B.

点评：本题考查抛物线的简单性质，考查直线与抛物线的位置关系，属于基础题.

11. (5分) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ ，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 ，且 $x_0 > 0$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, -1)$

考点：函数在某点取得极值的条件；函数的零点.

专题：导数的综合应用.

分析：分类讨论：当 $a \geq 0$ 时，容易判断出不符合题意；当 $a < 0$ 时，由于 $f(0) = 1 > 0$ ， $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，

可知：存在 $x_0 > 0$ ，使得 $f(x_0) = 0$ ，要使满足条件 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 ，且 $x_0 > 0$ ，则必须极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right)$

> 0 ，解出即可.

解答: 解: 当 $a=0$ 时, $f(x) = -3x^2+1=0$, 解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 函数 $f(x)$ 有两个零点, 不符合题意, 应舍去;

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3ax(x - \frac{2}{a}) = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x = \frac{2}{a} > 0$, 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

$\because x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$, 而 $f(0) = 1 > 0$, \therefore 存在 $x < 0$, 使得 $f(x) = 0$, 不符合条件: $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 应舍去.

当 $a < 0$ 时, $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3ax(x - \frac{2}{a}) = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x = \frac{2}{a} < 0$, 列表如下:

x	$(-\infty, \frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

而 $f(0) = 1 > 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, \therefore 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) = 0$,

$\because f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, \therefore 极小值 $f(\frac{2}{a}) = a(\frac{2}{a})^3 - 3(\frac{2}{a})^2 + 1 > 0$, 化为 $a^2 > 4$,

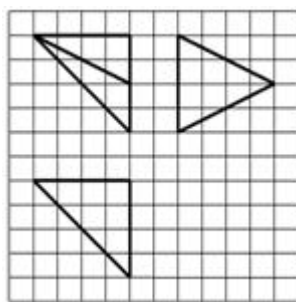
$\because a < 0, \therefore a < -2$.

综上所述: a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$.

故选: C.

点评: 本题考查了利用导数研究函数的单调性极值与最值、分类讨论的思想方法, 考查了推理能力和计算能力, 属于难题.

12. (5分) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ()



- A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $4\sqrt{2}$ D. 4

考点: 由三视图求面积、体积.

专题: 空间位置关系与距离.

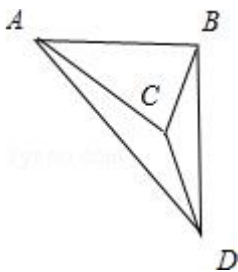
分析: 画出图形, 结合三视图的数据求出棱长, 推出结果即可.

解答：解：几何体的直观图如图：AB=4，BD=4，C到BD的中点的距离为：4，

$$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}, AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6, AD=4\sqrt{2},$$

显然AC最长，长为6.

故选：B.



点评：本题考查三视图求解几何体的棱长，考查计算能力.

二、填空题（共4小题，每小题5分）

13. （5分） $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为 -20. （用数字填写答案）

考点：二项式定理的应用；二项式系数的性质.

专题：二项式定理.

分析：由题意依次求出 $(x+y)^8$ 中 xy^7 ， x^2y^6 ，项的系数，求和即可.

解答：解： $(x+y)^8$ 的展开式中，含 xy^7 的系数是： $C_8^7=8$.

含 x^2y^6 的系数是 $C_8^6=28$,

$\therefore (x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为： $8-28=-20$.

故答案为：-20

点评：本题考查二项式定理系数的性质，二项式定理的应用，考查计算能力.

14. （5分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A，B，C三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市；

乙说：我没去过C城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为 A.

考点：进行简单的合情推理.

专题：推理和证明.

分析：可先由乙推出，可能去过A城市或B城市，再由甲推出只能是A，B中的一个，再由丙即可推出结论.

解答：解：由乙说：我没去过C城市，则乙可能去过A城市或B城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过B城市，则乙只能是去过A，B中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为A.

故答案为：A.

点评：本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题.

15. （5分）已知A，B，C为圆O上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ ，则 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 90°.

考点：数量积表示两个向量的夹角.

专题：平面向量及应用.

分析：根据向量之间的关系，利用圆直径的性质，即可得到结论.

解答：解：在圆中若 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$,

$$\text{即 } 2\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{AC},$$

即 $\vec{AB} + \vec{AC}$ 的和向量是过 A, O 的直径,

则以 AB, AC 为临边的四边形是矩形,

则 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$,

即 \vec{AB} 与 \vec{AC} 的夹角为 90° ,

故答案为: 90°

点评：本题主要考查平面向量的夹角的计算，利用圆直径的性质是解决本题的关键，比较基础.

16. (5分) 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a=2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\underline{\sqrt{3}}$.

考点：正弦定理.

专题：解三角形.

分析：由条件利用正弦定理可得 $b^2 + c^2 - bc = 4$. 再利用基本不等式可得 $bc \leq 4$, 当且仅当 $b=c=2$ 时, 取等号, 此时, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 从而求得它的面积 $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A$ 的值.

解答：解: $\triangle ABC$ 中, $\because a=2$, 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$,

\therefore 利用正弦定理可得 $4 - b^2 = (c-b)c$, 即 $b^2 + c^2 - bc = 4$.

再利用基本不等式可得 $4 \geq 2bc - bc = bc$, $\therefore bc \leq 4$, 当且仅当 $b=c=2$ 时, 取等号,

此时, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 它的面积为 $\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

点评：本题主要考查正弦定理的应用，基本不等式，属于中档题.

三、解答题

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $a_n \neq 0$, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, 其中 λ 为常数.

(I) 证明: $a_{n+2} - a_n = \lambda$

(II) 是否存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列? 并说明理由.

考点：数列递推式; 等差关系的确定.

专题：等差数列与等比数列.

分析: (I) 利用 $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, $a_{n+1} a_{n+2} = \lambda S_{n+1} - 1$, 相减即可得出;

(II) 对 λ 分类讨论: $\lambda=0$ 直接验证即可; $\lambda \neq 0$, 假设存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d . 可得 $\lambda = a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 2d$, $d = \frac{\lambda}{2}$. 得到 $\lambda S_n = \frac{\lambda^2}{4} n^2 + (\lambda - \frac{\lambda^2}{4}) n + 2 - \frac{\lambda}{2}$, 根据 $\{a_n\}$ 为等差

数列的充要条件是 $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ 2 - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$, 解得 λ 即可.

解答: (I) 证明: $\because a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$, $a_{n+1} a_{n+2} = \lambda S_{n+1} - 1$,

$$\therefore a_{n+1} (a_{n+2} - a_n) = \lambda a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} \neq 0,$$

$$\therefore a_{n+2} - a_n = \lambda.$$

(II) 解: ① 当 $\lambda=0$ 时, $a_n a_{n+1} = -1$, 假设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d .

则 $a_{n+2} - a_n = 0$, $\therefore 2d = 0$, 解得 $d = 0$,

$$\therefore a_n = a_{n+1} = 1,$$

$\therefore 1^2 = -1$, 矛盾, 因此 $\lambda=0$ 时 $\{a_n\}$ 不为等差数列.

② 当 $\lambda \neq 0$ 时, 假设存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d .

则 $\lambda = a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 2d$,

$$\therefore d = \frac{\lambda}{2}.$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{\lambda(n-1)}{2}, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{\lambda n}{2},$$

$$\therefore \lambda S_n = 1 + \left[1 + \frac{\lambda(n-1)}{2}\right] \left[1 + \frac{\lambda n}{2}\right] = \frac{\lambda^2}{4} n^2 + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right) n + 2 - \frac{\lambda}{2},$$

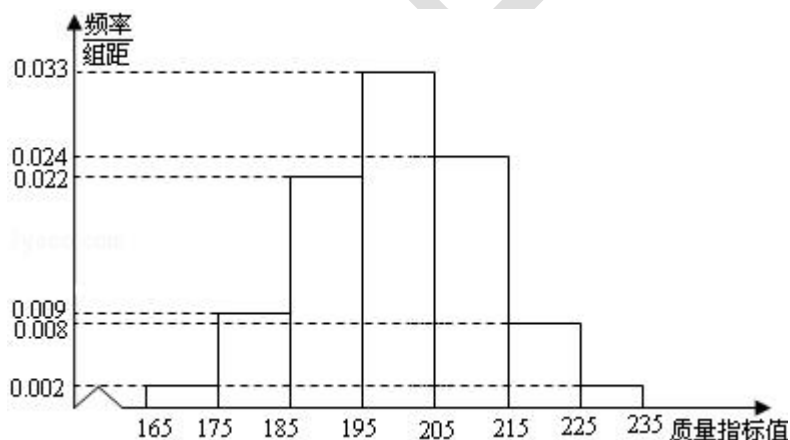
根据 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是 $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ 2 - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$, 解得 $\lambda = 4$.

此时可得 $S_n = n^2$, $a_n = 2n - 1$.

因此存在 $\lambda = 4$, 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列.

点评: 本题考查了递推式的意义、等差数列的通项公式及其前 n 项和公式、等差数列的充要条件等基础知识与基本技能方法, 考查了推理能力和计算能力、分类讨论的思想方法, 属于难题.

18. (12分) 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(I) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 \bar{x} 和样本方差 s^2 (同一组中数据用该组区间的中点值作代表);

(II) 由直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} , σ^2 近似为样本方差 s^2 .

(i) 利用该正态分布, 求 $P(187.8 < Z < 212.2)$;

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的产品件数, 利用 (i) 的结果, 求 EX .

附: $\sqrt{150} \approx 12.2$.

若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

考点: 正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义; 离散型随机变量的期望与方差.

专题: 计算题; 概率与统计.

分析: (I) 运用离散型随机变量的期望和方差公式, 即可求出;

(II) (i) 由 (I) 知 $Z \sim N(200, 150)$, 从而求出 $P(187.8 < Z < 212.2)$, 注意运用所给数据;

(ii) 由 (i) 知 $X \sim B(100, 0.6826)$, 运用 $EX=np$ 即可求得.

解答: 解: (I) 抽取产品的质量指标值的样本平均数 \bar{x} 和样本方差 s^2 分别为:

$$\bar{x} = 170 \times 0.02 + 180 \times 0.09 + 190 \times 0.22 + 200 \times 0.33 + 210 \times 0.24 + 220 \times 0.08 + 230 \times 0.02 = 200,$$

$$s^2 = (-30)^2 \times 0.02 + (-20)^2 \times 0.09 + (-10)^2 \times 0.22 + 0 \times 0.33 + 10^2 \times 0.24 + 20^2 \times 0.08 + 30^2 \times 0.02 = 150.$$

(II) (i) 由 (I) 知 $Z \sim N(200, 150)$, 从而 $P(187.8 < Z < 212.2) = P(200 - 12.2 < Z < 200 + 12.2) = 0.6826$;

(ii) 由 (i) 知一件产品的质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的概率为 0.6826,

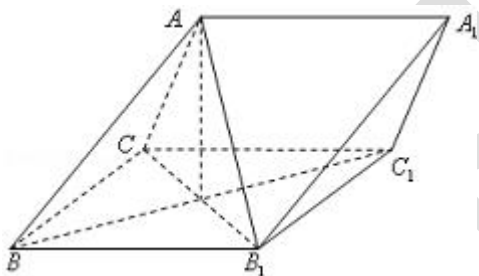
依题意知 $X \sim B(100, 0.6826)$, 所以 $EX = 100 \times 0.6826 = 68.26$.

点评: 本题主要考查离散型随机变量的期望和方差, 以及正态分布的特点及概率求解, 考查运算能力.

19. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB \perp B_1C$.

(I) 证明: $AC = AB_1$;

(II) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $AB = BC$, 求二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值.



考点: 用空间向量求平面间的夹角; 空间向量的夹角与距离求解公式.

专题: 空间向量及应用.

分析: (1) 连结 BC_1 , 交 B_1C 于点 O , 连结 AO , 可证 $B_1C \perp$ 平面 ABO , 可得 $B_1C \perp AO$, $B_1O = CO$, 进而可得 $AC = AB_1$;

(2) 以 O 为坐标原点, \overrightarrow{OB} 的方向为 x 轴的正方向, $|\overrightarrow{OB}|$ 为单位长度, $\overrightarrow{OB_1}$ 的方向为 y 轴的正方向, \overrightarrow{OA} 的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 分别可得两平面的法向量, 可得所求余弦值.

解答: 解: (1) 连结 BC_1 , 交 B_1C 于点 O , 连结 AO ,

\because 侧面 BB_1C_1C 为菱形,

$\therefore BC_1 \perp B_1C$, 且 O 为 BC_1 和 B_1C 的中点,

又 $\because AB \perp B_1C$, $\therefore B_1C \perp$ 平面 ABO ,

$\because AO \subset \text{平面 } ABO, \therefore B_1C \perp AO,$

又 $B_1O = CO, \therefore AC = AB_1,$

(2) $\because AC \perp AB_1,$ 且 O 为 B_1C 的中点, $\therefore AO = CO,$

又 $\because AB = BC, \therefore \triangle BOA \cong \triangle BOC, \therefore OA \perp OB,$

$\therefore OA, OB, OB_1$ 两两垂直,

以 O 为坐标原点, \overrightarrow{OB} 的方向为 x 轴的正方向, $|\overrightarrow{OB}|$ 为单位长度,

$\overrightarrow{OB_1}$ 的方向为 y 轴的正方向, \overrightarrow{OA} 的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系,

$\because \angle CBB_1 = 60^\circ, \therefore \triangle CBB_1$ 为正三角形, 又 $AB = BC,$

$\therefore A(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}), B(1, 0, 0), B_1(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0), C(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$

$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC} = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0),$

设向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 AA_1B_1 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = x - \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}, \text{可取 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

同理可得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量 $\vec{m} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}),$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{7},$$

\therefore 二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值为 $\frac{1}{7}$

点评: 本题考查空间向量法解决立体几何问题, 建立坐标系是解决问题的关键, 属中档题.

20. (12分) 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆 E 的右焦点, 直线 AF

的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(I) 求 E 的方程;

(II) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

考点: 直线与圆锥曲线的关系; 椭圆的标准方程.

专题: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

分析: (I) 设 $F(c, 0)$, 利用直线的斜率公式可得 $\frac{2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 可得 c . 又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b^2 = a^2 - c^2$, 即可解得 a, b ;

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 由题意可设直线 l 的方程为: $y = kx - 2$. 与椭圆的方程联立可得根与系数的关系, 再利用弦长公式、点到直线的距离公式、三角形的面积计算公式即可得出 $S_{\triangle OPQ}$. 通过换元再

利用基本不等式的性质即可得出.

解答: 解: (I) 设 $F(c, 0)$, \because 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \frac{2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } c = \sqrt{3}.$$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b^2 = a^2 - c^2, \text{ 解得 } a = 2, b = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

(II) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

由题意可设直线 l 的方程为: $y = kx - 2$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases},$$

化为 $(1+4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0$, 当 $\Delta = 16(4k^2 - 3) > 0$ 时, 即 $k^2 > \frac{3}{4}$ 时,

$$x_1 + x_2 = \frac{16k}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{12}{1+4k^2}.$$

$$\therefore |PQ| = \sqrt{(1+k^2) [(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2) \left[\left(\frac{16k}{1+4k^2}\right)^2 - \frac{48}{1+4k^2} \right]}$$

$$= \frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1},$$

$$\text{点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} d \cdot |PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1},$$

设 $\sqrt{4k^2-3} = t > 0$, 则 $4k^2 = t^2 + 3$,

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2+4} = \frac{4}{t+\frac{4}{t}} \leq \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1, \text{ 当且仅当 } t=2, \text{ 即 } \sqrt{4k^2-3}=2, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 时取等号.}$$

满足 $\Delta > 0$, $\therefore \triangle OPQ$ 的面积最大时直线 l 的方程为: $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

点评: 本题综合考查了椭圆的标准方程及其性质、斜率计算公式、椭圆的方程联立可得根与系数的关系、弦长公式、点到直线的距离公式、三角形的面积计算公式、基本不等式的性质等基础知识与基本技能方法, 考查了推理能力和计算能力, 考查了换元法和转化方法, 属于难题.

21. (12分) 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处得切线方程为 $y = e(x-1) + 2$.

(I) 求 a, b ;

(II) 证明: $f(x) > 1$.

考点: 导数在最大值、最小值问题中的应用; 利用导数研究曲线上某点切线方程.

专题: 综合题; 导数的综合应用.

分析: (I) 求出定义域, 导数 $f'(x)$, 根据题意有 $f(1) = 2, f'(1) = e$, 解出即可;

(II) 由 (I) 知, $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > x e^{-x} - \frac{2}{x}$, 设函数 $g(x) = x \ln x$, 函数 $h(x) = x e^{-x} - \frac{2}{x}$,

只需证明 $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$, 利用导数可分别求得 $g(x)_{\min}, h(x)_{\max}$;

解答: 解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = a e^x \ln x + \frac{a}{x} \cdot e^x - \frac{b}{x^2} \cdot e^{x-1} + \frac{b}{x} \cdot e^{x-1},$$

由题意可得 $f(1) = 2, f'(1) = e$,

故 $a=1, b=2$;

(II) 由 (I) 知, $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} \cdot e^{x-1}$,

从而 $f(x) > 1$ 等价于 $x \ln x > x e^{-x} - \frac{2}{x}$, 设函数 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$,

\therefore 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

$$g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}.$$

设函数 $h(x) = x e^{-x} - \frac{2}{x}$, 则 $h'(x) = e^{-x}(1-x)$.

\therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$.

综上, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

点评: 本题考查导数的几何意义、利用导数求函数的最值、证明不等式等, 考查转化思想, 考查学生分析解决问题的能力.

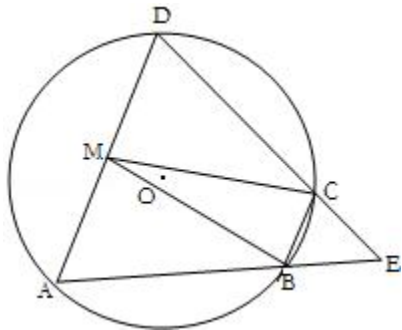
四、选做题 (22-24 题任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分)

选修 4-1: 集合证明选讲

22. (10 分) 如图, 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(I) 证明: $\angle D = \angle E$;

(II) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



考点：与圆有关的比例线段.

专题：选作题；几何证明.

分析：（I）利用四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形，可得 $\angle D = \angle CBE$ ，由 $CB = CE$ ，可得 $\angle E = \angle CBE$ ，即可证明： $\angle D = \angle E$ ；

（II）设 BC 的中点为 N，连接 MN，证明 $AD \parallel BC$ ，可得 $\angle A = \angle CBE$ ，进而可得 $\angle A = \angle E$ ，即可证明 $\triangle ADE$ 为等边三角形.

解答：证明：（I） \because 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$\therefore \angle D = \angle CBE$ ，

$\because CB = CE$ ，

$\therefore \angle E = \angle CBE$ ，

$\therefore \angle D = \angle E$ ；

（II）设 BC 的中点为 N，连接 MN，则由 $MB = MC$ 知 $MN \perp BC$ ，

$\therefore O$ 在直线 MN 上，

$\because AD$ 不是 $\odot O$ 的直径，AD 的中点为 M，

$\therefore OM \perp AD$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

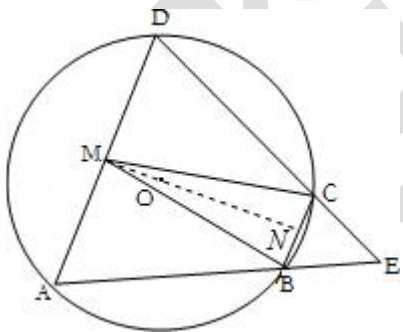
$\therefore \angle A = \angle CBE$ ，

$\because \angle CBE = \angle E$ ，

$\therefore \angle A = \angle E$ ，

由（I）知， $\angle D = \angle E$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形.



点评：本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

选修 4-4：坐标系与参数方程

23. 已知曲线 C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，直线 l: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ (t 为参数)

（I）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程.

（II）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线，交 l 于点 A，求 |PA| 的最大值与最小值.

考点：参数方程化成普通方程；直线与圆锥曲线的关系.

专题：坐标系和参数方程.

分析：(I) 联想三角函数的平方关系可取 $x=2\cos\theta$ 、 $y=3\sin\theta$ 得曲线 C 的参数方程，直接消掉参数 t 得直线 l 的普通方程；

(II) 设曲线 C 上任意一点 $P(2\cos\theta, 3\sin\theta)$. 由点到直线的距离公式得到 P 到直线 l 的距离，除以 $\sin 30^\circ$ 进一步得到 $|PA|$ ，化积后由三角函数的范围求得 $|PA|$ 的最大值与最小值.

解答：

解：(I) 对于曲线 C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 可令 $x=2\cos\theta$ 、 $y=3\sin\theta$,

故曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$, (θ 为参数).

对于直线 l: $\begin{cases} x=2+t & \text{①} \\ y=2-2t & \text{②} \end{cases}$,

由①得: $t=x-2$, 代入②并整理得: $2x+y-6=0$;

(II) 设曲线 C 上任意一点 $P(2\cos\theta, 3\sin\theta)$.

P 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4\cos\theta + 3\sin\theta - 6|$.

则 $|PA| = \frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{5} |5\sin(\theta + \alpha) - 6|$, 其中 α 为锐角.

当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时, $|PA|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$.

当 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 时, $|PA|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

点评：本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题.

选修 4-5: 不等式选讲

24. 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$.

(I) 求 $a^3 + b^3$ 的最小值;

(II) 是否存在 a, b , 使得 $2a + 3b = 6$? 并说明理由.

考点：基本不等式；基本不等式在最值问题中的应用.

专题：不等式的解法及应用.

分析：(I) 由条件利用基本不等式求得 $ab \geq 4$, 再利用基本不等式求得 $a^3 + b^3$ 的最小值.

(II) 根据 $ab \geq 4$ 及基本不等式求的 $2a + 3b > 8$, 从而可得不存在 a, b , 使得 $2a + 3b = 6$.

解答：解：(I) $\because a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$,

$$\therefore \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}},$$

$$\therefore ab \geq 2,$$

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

$$\therefore a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{(ab)^3} \geq 2\sqrt{2^3} = 4\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } a=b=\sqrt{2} \text{ 时取等号,}$$

$\therefore a^3+b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(II) 由 (1) 可知, $2a+3b \geq 2\sqrt{2a \cdot 3b} = 2\sqrt{6ab} \geq 4\sqrt{3} > 6$,
故不存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$ 成立.

点评: 本题主要考查基本不等式在最值中的应用, 要注意检验等号成立条件是否具备, 属于基础题.

苍瑞教育