2014 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

适用地区： 河南 河北 山西

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分）

1.（5 分）已知集合 A={x|x^2 - 2x - 3≥0}，B={x| - 2≤x＜2}，则 A∩B=（　　）

A．[- 2， - 1]　　B．[- 1，2）　　C．[- 1，1]　　D．[1，2）

2.（5 分）$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$=（　　）

A．1+i　　B．1 - i　　C． - 1+i　　D． - 1 - i

3.（5 分）设函数 f（x），g（x）的定义域都为 R，且 f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，则下列结论中正确的是（　　）

A．f（x）g（x）是偶函数　　B．|f（x）|g（x）是奇函数　　C．f（x）|g（x）|是奇函数　　D．|f（x）g（x）|是奇函数

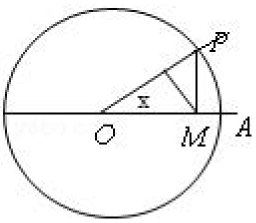
4.（5 分）已知 F 为双曲线 C：x^2 - my^2=3m（m＞0）的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为（　　）

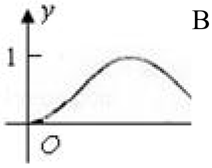
A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{3}$m　　D．3m

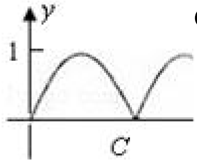
5.（5 分）4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　　）

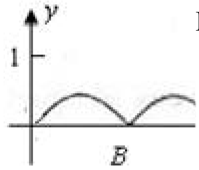
A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

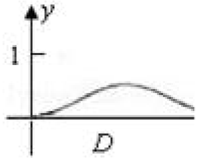
6.（5 分）如图，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 做直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f（x），则 y=f（x）在[0，π]的图象大致为（　　）



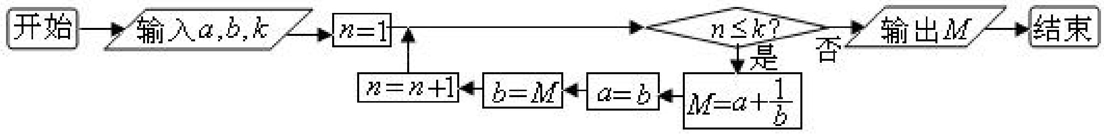
A．


B．


C．


D．


7．（5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A．$\frac{20}{3}$　　B．$\frac{7}{2}$　　C．$\frac{16}{5}$　　D．$\frac{15}{8}$

8．（5 分）设α∈（0，$\frac{\pi}{2}$），β∈（0，$\frac{\pi}{2}$），且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

9．（5 分）不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的解集记为 D，有下列四个命题：

p_1：∀（x，y）∈D，$x+2y\ge-2$　　　p_2：∃（x，y）∈D，$x+2y\ge 2$

p_3：∀（x，y）∈D，$x+2y\le 3$　　　p_4：∃（x，y）∈D，$x+2y\le-1$

其中真命题是（　　）

A．p_2，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_1，p_2　　D．p_1，p_3

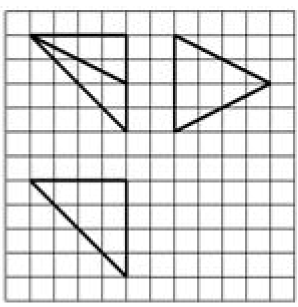
10．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则|QF|=（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．3　　C．$\frac{5}{2}$　　D．2

11．（5 分）已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是（　　）

A．（2，+∞）　B．（1，+∞）　C．（﹣∞，﹣2）D．（﹣∞，﹣1）

12．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　B．6　　C．$4\sqrt{2}$　　D．4

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为____________．（用数字填写答案）

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为____________．

15．（5 分）已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为____________．

16．（5 分）已知 a，b，c 分别为△ABC 三个内角 A，B，C 的对边，$a=2$，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则△ABC 面积的最大值为____________．

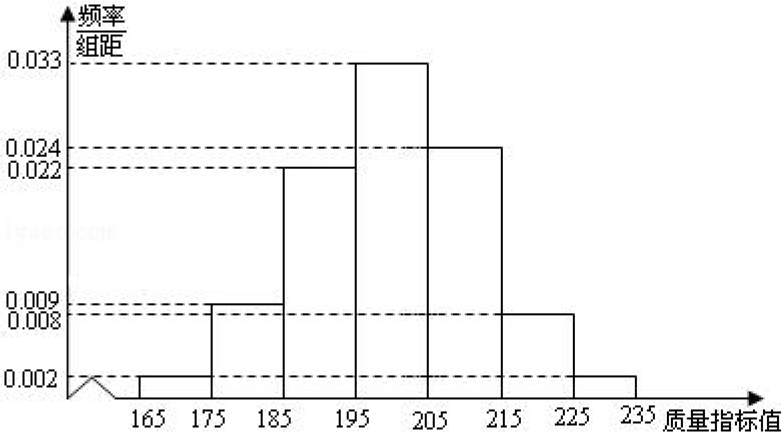
三、解答题

17．（12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数．

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在 λ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列？并说明理由．

18．（12 分）从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

（i）利用该正态分布，求 $P(187.8<Z<212.2)$；

（ii）某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求 EX.

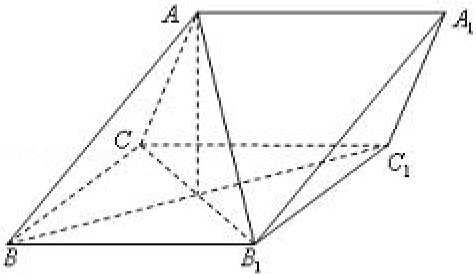
附：$\sqrt{150}\approx 12.2$.

若 $Z\sim N(\mu，\sigma^2)$ 则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19．（12 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$．

（Ⅰ）证明：$AC=AB_1$；

（Ⅱ）若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$AB=BC$，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值．



20．（12 分）已知点 A（0，﹣2），椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆 E 的右焦点，直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当△OPQ 的面积最大时，求 l 的方程．

21．（12 分）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点（1，f（1））处得切线方程为 $y=e(x-1)+2$．

（Ⅰ）求 a、b；

（Ⅱ）证明：$f(x)>1$．

四、选做题（22-24 题任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分）

选修 4-4：坐标系与参数方程

23．已知曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．

（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

选修 4-5：不等式选讲

24．若 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

（Ⅰ）求 a^3+b^3 的最小值；

（Ⅱ）是否存在 a，b，使得 $2a+3b=6$？并说明理由．

2014 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分）

1．（5 分）已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\geq 0\}$，$B=\{x|-2\leq x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$[-2，-1]$　　B．$[-1，2)$　　C．$[-1，1]$　　D．$[1，2)$

考点：交集及其运算．

专题：集合．

分析：根据集合的基本运算即可得到结论．

解答：解：$A=\{x|x^2-2x-3\geq 0\}=\{x|x\geq 3$ 或 $x\leq -1\}$，$B=\{x|-2\leq x<2\}$，

则 $A\cap B=\{x|-2\leq x\leq -1\}$，

故选：A

点评：本题主要考查集合的基本运算，比较基础．

2．（5 分）$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=$（　　）

A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

考点：复数代数形式的乘除运算．

专题：数系的扩充和复数．

分析：由条件利用两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，计算求得结果．

解答：

解：$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\frac{2i(1+i)}{-2i}=-(1+i)=-1-i$，

故选：D．

点评：本题主要考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位 i 的幂运算性质，属于基础题．

3．（5 分）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 R，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是（　　）

A．$f(x)g(x)$ 是偶函数　　B．$|f(x)|g(x)$ 是奇函数　　C．$f(x)|g(x)|$ 是奇函数　　D．$|f(x)g(x)|$ 是奇函数

考点：函数奇偶性的判断；函数的定义域及其求法．

专题：函数的性质及应用．

分析：由题意可得，$|f(x)|$为偶函数，$|g(x)|$为偶函数．再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积还是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，从而得出结论．

解答：解：∵f（x）是奇函数，g（x）是偶函数，∴|f（x）|为偶函数，|g（x）|为偶函数．

再根据两个奇函数的积是偶函数、两个偶函数的积还是偶函数、一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数，

可得 f（x）|g（x）|为奇函数，

故选：C．

点评：本题主要考查函数的奇偶性，注意利用函数的奇偶性规律，属于基础题．

4．（5 分）已知 F 为双曲线 C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{3}m$　　D．3m

考点：双曲线的简单性质．

专题：计算题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：双曲线方程化为标准方程，求出焦点坐标，一条渐近线方程，利用点到直线的距离公式，可得结论．

解答：

解：双曲线 C：$x^2-my^2=3m$（m＞0）可化为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$，

∴一个焦点为（$\sqrt{3m+3}$，0），一条渐近线方程为$x+\sqrt{m}y=0$，

∴点 F 到 C 的一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$.

故选：A．

点评：本题考查双曲线的方程与性质，考查点到直线的距离公式，属于基础题．

5．（5 分）4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　　）

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

考点：等可能事件的概率．

专题：计算题；概率与统计．

分析：求得 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可．

解答：解：4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4=16$ 种情况，

周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4-2=16-2=14$ 种情况，

∴所求概率为$\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

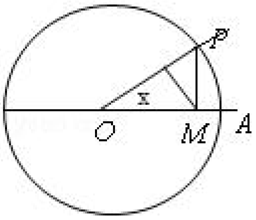
故选：D．

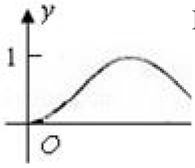
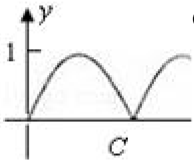
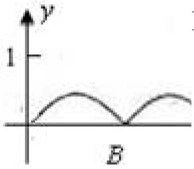
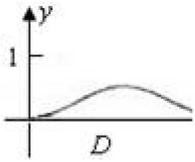
点评：本题考查古典概型，是一个古典概型与排列组合结合的问题，解题时先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件 A 包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数．

6．（5 分）如图，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，

过点 P 做直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f（x），则 y=f（x）在[0，π]的图

象大致为（　　）



A. 
B. 
C. 
D. 

考点：抽象函数及其应用．

专题：三角函数的图像与性质．

分析：在直角三角形 OMP 中，求出 OM，注意长度、距离为正，再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到 f（x）的表达式，然后化简，分析周期和最值，结合图象正确选择．

解答：解：在直角三角形 OMP 中，OP=1，∠POM=x，则 OM=|cosx|，

∴点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 f（x）=OM|sinx|

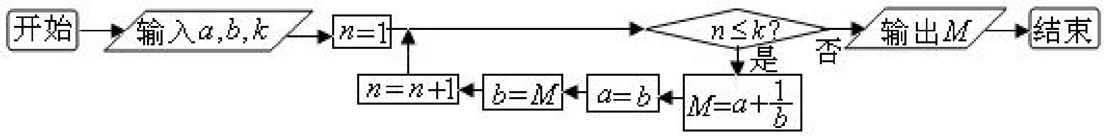
$=|\cos x|\bullet|\sin x|=\frac{1}{2}|\sin 2x|$，

其周期为 $T=\frac{\pi}{2}$，最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为 0，

故选 C．

点评：本题主要考查三角函数的图象与性质，正确表示函数的表达式是解题的关键，同时考查二倍角公式的运用．

7．（5 分）执行如图的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 M=（　　）



A. $\frac{20}{3}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $\frac{15}{8}$

考点：程序框图．

专题：概率与统计．

分析：根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出 M 的值．

解答：解：由程序框图知：第一次循环 $M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，a=2，$b=\frac{3}{2}$，n=2；

第二次循环 $M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{8}{3}$，n=3；

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$，$a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{15}{8}$，n=4．

不满足条件 n≤3，跳出循环体，输出 $M=\frac{15}{8}$．

故选：D．

点评：本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法．

8．（5 分）设$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A．$3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B．$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C．$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

考点：三角函数的化简求值．

专题：三角函数的求值．

分析：化切为弦，整理后得到 $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$，由该等式左右两边角的关系可排除选项 A，B，然后验证 C 满足等式 $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$，则答案可求．

解答：解：由 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，得：

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，

即 $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha$，

$\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$．

由等式右边为单角α，左边为角α与β的差，可知β与 2α有关．

排除选项 A，B 后验证 C，

当$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$时，$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$成立．

故选：C．

点评：本题考查三角函数的化简求值，训练了利用排除法及验证法求解选择题，是基础题．

9．（5 分）不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的解集记为 D，有下列四个命题：

p_1：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\geq -2$　　　　p_2：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\geq 2$

p_3：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\leq 3$　　　　p_4：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\leq -1$

其中真命题是（　　）

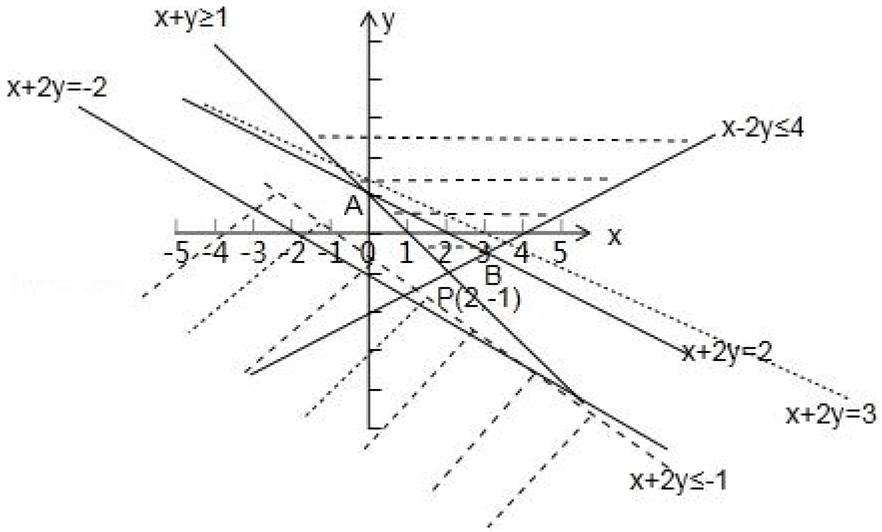
A．p_2，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_1，p_2　　D．p_1，p_3

考点：命题的真假判断与应用．

专题：不等式的解法及应用．

分析：作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的表示的区域 D，对四个选项逐一分析即可．

解答：解：作出图形如下：



由图知，区域 D 为直线 x+y=1 与 x﹣2y=4 相交的上部角型区域，

显然，区域 D 在 x+2y≥﹣2 区域的上方，故 A：∀（x，y）∈D，x+2y≥﹣2 成立；

在直线 x+2y=2 的右上方区域，：∃（x，y）∈D，x+2y≥2，故 p_2：∃（x，y）∈D，x+2y≥2 正确；

由图知，p_3：∀（x，y）∈D，x+2y≤3 错误；

x+2y≤﹣1 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域 D 下方，故 p_4：∃（x，y）∈D，x+2y≤﹣1 错误；

综上所述，p_1、p_2 正确；

故选：C．

点评：本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题．

10．（5 分）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则|QF|=（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．3　　C．$\frac{5}{2}$　　D．2

考点：抛物线的简单性质．

专题：计算题；圆锥曲线的定义、性质与方程．

分析：求得直线 PF 的方程，与 $y^2=8x$ 联立可得 x=1，利用|QF|=d 可求．

解答：解：设 Q 到 l 的距离为 d，则|QF|=d，

∵$\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，

∴|PQ|=3d，
∴直线 PF 的斜率为 $-2\sqrt{2}$，
∵F（2，0），
∴直线 PF 的方程为 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$，
与 $y^2=8x$ 联立可得 x=1，
∴|QF|=d=1+2=3，
故选：B．

点评：本题考查抛物线的简单性质，考查直线与抛物线的位置关系，属于基础题．

11．（5 分）已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是（　　）

A．（2，+∞）　B．（1，+∞）　C．（－∞，－2）　D．（－∞，－1）

考点：函数在某点取得极值的条件；函数的零点．

专题：导数的综合应用．

分析：分类讨论：当 a≥0 时，容易判断出不符合题意；当 a＜0 时，由于而 f（0）=1＞0，x→+∞时，f（x）→－∞，可知：存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)=0$，要使满足条件 f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则必须极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right)>0$，解出即可．

解答：解：当 a=0 时，$f(x)=-3x^2+1=0$，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，函数 f（x）有两个零点，不符合题意，应舍去；

当 a＞0 时，令 $f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)=0$，解得 x=0 或 $x=\frac{2}{a}>0$，列表如下：

x	（－∞，0）	0	$\left(0,\frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$
f′（x）	+	0	-	0	+
f（x）	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

∵x→+∞，f（x）→+∞，而 f（0）=1＞0，∴存在 x＜0，使得 f（x）=0，不符合条件：f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，应舍去．

当 a＜0 时，$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)=0$，解得 x=0 或 $x=\frac{2}{a}<0$，列表如下：

x	$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a},0\right)$	0	（0，+∞）
f′（x）	-	0	+	0	-
f（x）	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

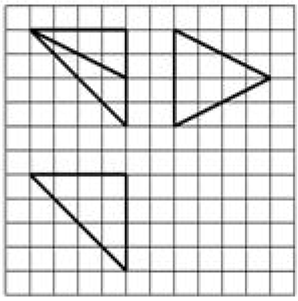
而 f（0）=1＞0，x→+∞时，f（x）→－∞，∴存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)=0$，

∵f（x）存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，∴极小值 $f\left(\frac{2}{a}\right)=a\left(\frac{2}{a}\right)^3-3\left(\frac{2}{a}\right)^2+1>0$，化为 $a^2>4$，

∵a＜0，∴a＜－2．
综上可知：a 的取值范围是（－∞，－2）．
故选：C．

点评：本题考查了利用导数研究函数的单调性极值与最值、分类讨论的思想方法，考查了推理能力和计算能力，属于难题．

12．（5 分）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　　）



A．$6\sqrt{2}$　　B．6　　C．$4\sqrt{2}$　　D．4

考点：由三视图求面积、体积．

专题：空间位置关系与距离．

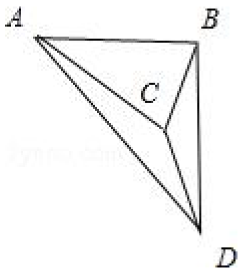
分析：画出图形，结合三视图的数据求出棱长，推出结果即可．

解答：解：几何体的直观图如图：AB=4，BD=4，C 到 BD 的中点的距离为：4，

$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．$AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$AD=4\sqrt{2}$，

显然 AC 最长．长为 6．

故选：B．



点评：本题考查三视图求解几何体的棱长，考查计算能力．

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分）

13．（5 分）$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为＿－20＿．（用数字填写答案）

考点：二项式定理的应用；二项式系数的性质．

专题：二项式定理．

分析：由题意依次求出 $(x+y)^8$ 中 xy^7，x^2y^6，项的系数，求和即可．

解答：解：$(x+y)^8$ 的展开式中，含 xy^7 的系数是：$C_8^7=8$．

含 x^2y^6 的系数是 $C_8^6=28$，

$\therefore (x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为：$8-28=-20$．

故答案为：－20

点评：本题考查二项式定理系数的性质，二项式定理的应用，考查计算能力．

14．（5 分）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为＿A＿．

考点：进行简单的合情推理．

专题：推理和证明．

分析：可先由乙推出，可能去过 A 城市或 B 城市，再由甲推出只能是 A，B 中的一个，再由丙即可推出结论．

解答：解：由乙说：我没去过 C 城市，则乙可能去过 A 城市或 B 城市，

但甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市，则乙只能是去过 A，B 中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，

则由此可判断乙去过的城市为 A．

故答案为：A．

点评：本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题．

15．（5 分）已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为__90°__．

考点：数量积表示两个向量的夹角．

专题：平面向量及应用．

分析：根据向量之间的关系，利用圆直径的性质，即可得到结论．

解答：解：在圆中若$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），

即 $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$的和向量是过 A，O 的直径，

则以 AB，AC 为临边的四边形是矩形，

则$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为 90°，

故答案为：90°

点评：本题主要考查平面向量的夹角的计算，利用圆直径的性质是解决本题的关键，比较基础．

16．（5 分）已知 a，b，c 分别为△ABC 三个内角 A，B，C 的对边，a=2，且（2+b）（sinA﹣sinB）=（c﹣b）sinC，则△ABC 面积的最大值为__$\sqrt{3}$__．

考点：正弦定理．

专题：解三角形．

分析：由条件利用正弦定理可得 $b^2+c^2-bc=4$．再利用基本不等式可得 $bc\le 4$，当且仅当 b=c=2 时，取等号，此时，△ABC 为等边三角形，从而求得它的面积 $\frac{1}{2}bc\cdot \sin A$ 的值．

解答：解：△ABC 中，∵a=2，且（2+b）（sinA﹣sinB）=（c﹣b）sinC，

∴利用正弦定理可得 $4-b^2=(c-b)c$，即 $b^2+c^2-bc=4$．

再利用基本不等式可得 $4\ge 2bc-bc=bc$，∴$bc\le 4$，当且仅当 b=c=2 时，取等号，

此时，△ABC 为等边三角形，它的面积为 $\frac{1}{2}bc\cdot \sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

点评：本题主要考查正弦定理的应用，基本不等式，属于中档题．

三、解答题

17．（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\ne 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数．

（Ⅰ）证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$

（Ⅱ）是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由．

考点：数列递推式；等差关系的确定.

专题：等差数列与等比数列.

分析：（Ⅰ）利用 $a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，相减即可得出；

（Ⅱ）对λ分类讨论：λ=0 直接验证即可；λ≠0，假设存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d．可得$\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，$d=\frac{\lambda}{2}$．得到$\lambda S_n=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得λ即可.

解答：（Ⅰ）证明：∵$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，$a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$，

∴$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=\lambda a_{n+1}$

∵$a_{n+1}\neq 0$，

∴$a_{n+2}-a_n=\lambda$.

（Ⅱ）解：①当λ=0 时，$a_na_{n+1}=-1$，假设$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d.

则 $a_{n+2}-a_n=0$，∴2d=0，解得 d=0，

∴$a_n=a_{n+1}=1$，

∴$1^2=-1$，矛盾，因此λ=0 时$\{a_n\}$不为等差数列.

②当λ≠0 时，假设存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d.

则$\lambda=a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=2d$，

∴ $d=\frac{\lambda}{2}$.

∴ $a_n=1+\frac{\lambda(n-1)}{2}$，$a_{n+1}=1+\frac{\lambda n}{2}$，

∴$\lambda S_n=1+[1+\frac{\lambda(n-1)}{2}][1+\frac{\lambda n}{2}]=\frac{\lambda^2}{4}n^2+(\lambda-\frac{\lambda^2}{4})n+2-\frac{\lambda}{2}$，

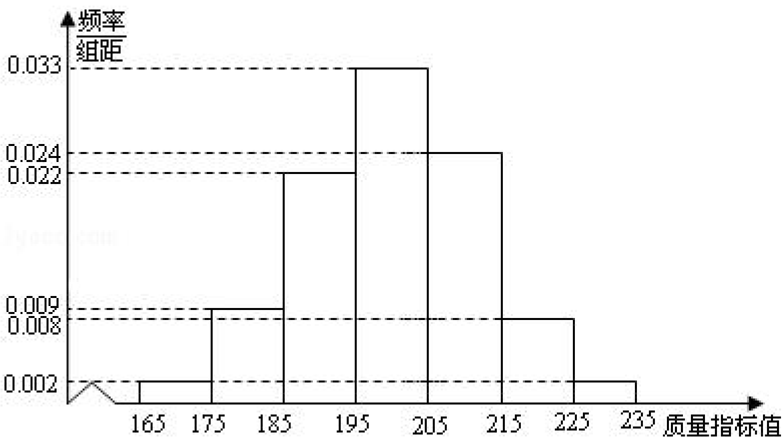
根据$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是$\begin{cases}\lambda\neq 0\\ 2-\frac{\lambda}{2}=0\end{cases}$，解得λ=4.

此时可得 $S_n=n^2$，$a_n=2n-1$.

因此存在λ=4，使得$\{a_n\}$为等差数列.

点评：本题考查了递推式的意义、等差数列的通项公式及其前 n 项和公式、等差数列的充要条件等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力、分类讨论的思想方法，属于难题.

18.（12 分）从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求这 500 件产品质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差 s^2（同一组中数据用该组区间的中点值作代表）；

（Ⅱ）由直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 N（μ，σ^2），其中μ近似为样本平均数$\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.
（i）利用该正态分布，求 P（187.8＜Z＜212.2）；
（ii）某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间（187.8，212.2）的产品件数，利用（i）的结果，求 EX.
附：$\sqrt{150}\approx12.2$.
若 Z﹣N（μ，σ^2）则 P（μ﹣σ＜Z＜μ+σ）=0.6826，P（μ﹣2σ＜Z＜μ+2σ）=0.9544.

考点：正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义；离散型随机变量的期望与方差.

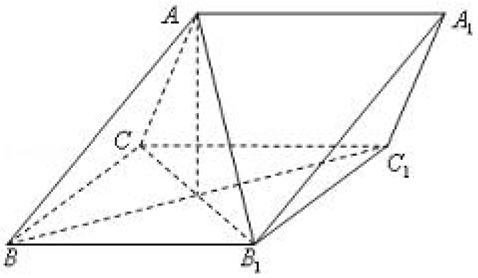
专题：计算题；概率与统计.

分析：（Ⅰ）运用离散型随机变量的期望和方差公式，即可求出；
（Ⅱ）(i）由（Ⅰ）知 Z～N（200，150），从而求出 P（187.8＜Z＜212.2），注意运用所给数据；
（ii）由（i）知 X～B（100，0.6826），运用 EX=np 即可求得.

解答：解：（Ⅰ）抽取产品的质量指标值的样本平均数$\overline{x}$和样本方差 s^2 分别为：
$\overline{x}$=170×0.02+180×0.09+190×0.22+200×0.33+210×0.24+220×0.08+230×0.02=200，
s^2=（﹣30）^{2}×0.02+（﹣20）^{2}×0.09+（﹣10）^{2}×0.22+0×0.33+10^2×0.24+20^2×0.08+30^2×0.02=150.
（Ⅱ）(i）由（Ⅰ）知 Z～N（200，150），从而 P（187.8＜Z＜212.2）=P（200﹣12.2＜Z＜200+12.2）=0.6826；
（ii）由（i）知一件产品的质量指标值位于区间（187.8，212.2）的概率为 0.6826，
依题意知 X～B（100，0.6826），所以 EX=100×0.6826=68.26.

点评：本题主要考查离散型随机变量的期望和方差，以及正态分布的特点及概率求解，考查运算能力.

19.（12 分）如图，三棱柱 ABC﹣$A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，AB⊥B_1C.
（Ⅰ）证明：AC=AB_1；
（Ⅱ）若 AC⊥AB_1，∠CBB_1=60°，AB=BC，求二面角 A﹣A_1B_1﹣C_1 的余弦值.



考点：用空间向量求平面间的夹角；空间向量的夹角与距离求解公式.
专题：空间向量及应用.
分析：（1）连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，可证 B_1C⊥平面 ABO，可得 B_1C⊥AO，B_10=CO，进而可得 AC=AB_1；
（2）以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，|$\overrightarrow{OB}$|为单位长度，$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，分别可得两平面的法向量，可得所求余弦值.
解答：解：（1）连结 BC_1，交 B_1C 于点 O，连结 AO，
∵侧面 BB_1C_1C 为菱形，
∴BC_1⊥B_1C，且 O 为 BC_1 和 B_1C 的中点，
又∵AB⊥B_1C，∴B_1C⊥平面 ABO，

∵AO⊂平面 ABO，∴B_1C⊥AO，

又 B_10=CO，∴AC=AB_1，

（2）∵$AC\perp AB_1$，且 O 为 B_1C 的中点，∴AO=CO，
又∵AB=BC，∴△BOA≌△BOC，∴OA⊥OB，
∴OA，OB，OB_1 两两垂直，

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度，

$\overrightarrow{OB_1}$的方向为 y 轴的正方向，$\overrightarrow{OA}$的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，

∵∠CBB_1=60°，∴△CBB_1 为正三角形，又 AB=BC，

∴A（0，0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$），B（1，0，0，），B_1（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），C（0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0）

∴$\overrightarrow{AB_1}$=（0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$=（1，0，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$），$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$=（﹣1，$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，0），

设向量$\overrightarrow{n}$=（x，y，z）是平面 AA_1B_1 的法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取$\overrightarrow{n}$=（1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

同理可得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量$\overrightarrow{m}$=（1，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$），

∴cos＜$\overrightarrow{m}$，$\overrightarrow{n}$＞=$\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{7}$，

∴二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值为$\frac{1}{7}$

点评：本题考查空间向量法解决立体几何问题，建立坐标系是解决问题的关键，属中档题．

20．（12 分）已知点 A（0，﹣2），椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆 E 的右焦点，直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点．

（Ⅰ）求 E 的方程；
（Ⅱ）设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当△OPQ 的面积最大时，求 l 的方程．

考点：直线与圆锥曲线的关系；椭圆的标准方程．
专题：圆锥曲线的定义、性质与方程．
分析：（Ⅰ）设 F（c，0），利用直线的斜率公式可得$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，可得 c．又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b^2=a^2-c^2$，即可解得 a，b；
（Ⅱ）设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）．由题意可设直线 l 的方程为：y=kx﹣2．与椭圆的方程联立可得根与系数的关系，再利用弦长公式、点到直线的距离公式、三角形的面积计算公式即可得出 $S_{\triangle OPQ}$．通过换元再利用基本不等式的性质即可得出．

解答：解：（Ⅰ）设 F（c，0），∵直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴$\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，解得 $c=\sqrt{3}$．

又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b^2=a^2-c^2$，解得 a=2，b=1．

∴椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）.

由题意可设直线 l 的方程为：y=kx－2.

联立$\begin{cases}y=kx-2\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，

化为（1+4k^2）x^2－16kx+12=0，当△=16（4k^2－3）＞0 时，即$k^2>\frac{3}{4}$时，

$x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$.

∴$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(\frac{16k}{1+4k^2})^2-\frac{48}{1+4k^2}]}$

$=\frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$.

∴$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d\cdot|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{4k^2+1}$，

设$\sqrt{4k^2-3}=t>0$，则 $4k^2=t^2+3$，

∴$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{4}}=1$，当且仅当 t=2，即$\sqrt{4k^2-3}=2$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$时取等号.

满足△＞0，∴△OPQ 的面积最大时直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

点评：本题综合考查了椭圆的标准方程及其性质、斜率计算公式、椭圆的方程联立可得根与系数的关系、弦长公式、点到直线的距离公式、三角形的面积计算公式、基本不等式的性质等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力，考查了换元法和转化方法，属于难题.

21.（12 分）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处得切线方程为 y=e（x－1）+2.

（Ⅰ）求 a、b；

（Ⅱ）证明：f（x）＞1.

考点： 导数在最大值、最小值问题中的应用；利用导数研究曲线上某点切线方程.

专题： 综合题；导数的综合应用.

分析：（Ⅰ）求出定义域，导数f′（x），根据题意有f（1）=2，f′（1）=e，解出即可；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，f（x）>1等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{x}$，设函数g（x）=xlnx，函数$h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{x}$，只需证明$g(x)_{min}>h(x)_{max}$，利用导数可分别求得$g(x)_{min}$，$h(x)_{max}$；

解答：解：（Ⅰ）函数f（x）的定义域为（0，+∞），

$f'(x)=ae^{x}\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^{x}-\frac{b}{x^{2}}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$，

由题意可得f（1）=2，f′（1）=e，

故a=1，b=2；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=e^{x}\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$，

从而f（x）>1等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$，设函数g（x）=xlnx，则g′（x）=1+lnx，

∴当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，g′（x）<0；当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，g′（x）>0.

故g（x）在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增，从而g（x）在（0，+∞）上的最小值为$g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

设函数$h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{x}$，则$h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

∴当x∈（0，1）时，h′（x）>0；当x∈（1，+∞）时，h′（x）<0，

故h（x）在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，

从而h（x）在（0，+∞）上的最大值为$h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当x>0时，g（x）>h（x），即f（x）>1.

点评：本题考查导数的几何意义、利用导数求函数的最值、证明不等式等，考查转化思想，考查学生分析解决问题的能力.

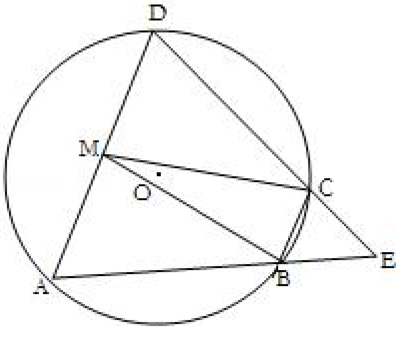
四、选做题（22-24题任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分）

选修4-1：集合证明选讲

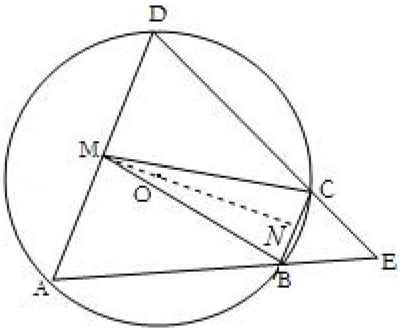
22.（10分）如图，四边形ABCD是⊙O的内接四边形，AB的延长线与DC的延长线交于点E，且CB=CE.

（Ⅰ）证明：∠D=∠E；

（Ⅱ）设AD不是⊙O的直径，AD的中点为M，且MB=MC，证明：△ADE为等边三角形.



考点：与圆有关的比例线段．
专题：选作题；几何证明．
分析：（Ⅰ）利用四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，可得∠D=∠CBE，由 CB=CE，可得∠E=∠CBE，即可证明：∠D=∠E；
（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，证明 AD∥BC，可得∠A=∠CBE，进而可得∠A=∠E，即可证明△ADE 为等边三角形．
解答：证明：（Ⅰ）∵四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形，
∴∠D=∠CBE，
∵CB=CE，
∴∠E=∠CBE，
∴∠D=∠E；
（Ⅱ）设 BC 的中点为 N，连接 MN，则由 MB=MC 知 MN⊥BC，
∴O 在直线 MN 上，
∵AD 不是⊙O 的直径，AD 的中点为 M，
∴OM⊥AD，
∴AD∥BC，
∴∠A=∠CBE，
∵∠CBE=∠E，
∴∠A=∠E，
由（Ⅰ）知，∠D=∠E，
∴△ADE 为等边三角形．



点评：本题考查圆的内接四边形性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

选修 4-4：坐标系与参数方程

23．已知曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\\y=2-2t\end{cases}$（t 为参数）

（Ⅰ）写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程．
（Ⅱ）过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，求|PA|的最大值与最小值．

考点：参数方程化成普通方程；直线与圆锥曲线的关系．
专题：坐标系和参数方程．
分析：（Ⅰ）联想三角函数的平方关系可取 x=2cosθ、y=3sinθ得曲线 C 的参数方程，直接消掉参数 t 得直线 l 的普通方程；
（Ⅱ）设曲线 C 上任意一点 P（2cosθ，3sinθ）．由点到直线的距离公式得到 P 到直线 l 的距离，除以 sin30°进一步得到|PA|，化积后由三角函数的范围求得|PA|的最大值与最小值．

解答：

解：（Ⅰ）对于曲线C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，可令 x=2cosθ、y=3sinθ，

故曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$，（θ为参数）.

对于直线l：$\begin{cases}x=2+t & ①\\y=2-2t & ②\end{cases}$，

由①得：t=x﹣2，代入②并整理得：2x+y﹣6=0；

（Ⅱ）设曲线C上任意一点P（2cosθ，3sinθ）.

P到直线l的距离为$d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$.

则$|PA|=\frac{d}{\sin30^\circ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，其中α为锐角.

当sin（θ+α）=﹣1时，|PA|取得最大值，最大值为$\frac{22\sqrt{5}}{5}$.

当sin（θ+α）=1时，|PA|取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

点评：本题考查普通方程与参数方程的互化，训练了点到直线的距离公式，体现了数学转化思想方法，是中档题.

选修4-5：不等式选讲

24．若a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

（Ⅰ）求a^3+b^3的最小值；

（Ⅱ）是否存在a，b，使得2a+3b=6？并说明理由.

考点：基本不等式；基本不等式在最值问题中的应用.

专题：不等式的解法及应用.

分析：（Ⅰ）由条件利用基本不等式求得 ab≥4，再利用基本不等式求得a^3+b^3的最小值.

（Ⅱ）根据 ab≥4 及基本不等式求的2a+3b＞8，从而可得不存在a，b，使得2a+3b=6.

解答：

解：（Ⅰ）∵a＞0，b＞0，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，

∴ab≥2，

当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号.

∵$a^3+b^3\geq2\sqrt{(ab)^3}\geq2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当$a=b=\sqrt{2}$时取等号，

∴a^3+b^3的最小值为$4\sqrt{2}$.

（Ⅱ）由（1）可知，$2a+3b\geq2\sqrt{2a\cdot3b}=2\sqrt{6ab}\geq4\sqrt{3}>6$，

故不存在a，b，使得2a+3b=6成立.

点评：本题主要考查基本不等式在最值中的应用，要注意检验等号成立条件是否具备，属于基础题.