

2016 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 第 I 卷 1 至 3 页, 第 II 卷 3 至 5 页.
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置.
3. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效.
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回.

第 I 卷

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

(1) 设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{1, 3\}$ (B) $\{3, 5\}$ (C) $\{5, 7\}$ (D) $\{1, 7\}$

(2) 设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等, 其中 a 为实数, 则 $a =$

- (A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3

(3) 为美化环境, 从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中, 余下的 2 种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

(4) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{5}$, $c = 2$, $\cos A = \frac{2}{3}$, 则 $b =$

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

(5) 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为

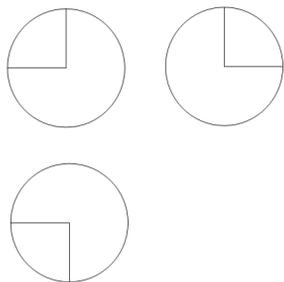
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

(6) 若将函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图像对应的函数为

- (A) $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ (B) $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ (C) $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ (D) $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

(7) 如图, 学. 科网某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$,

则它的表面积是

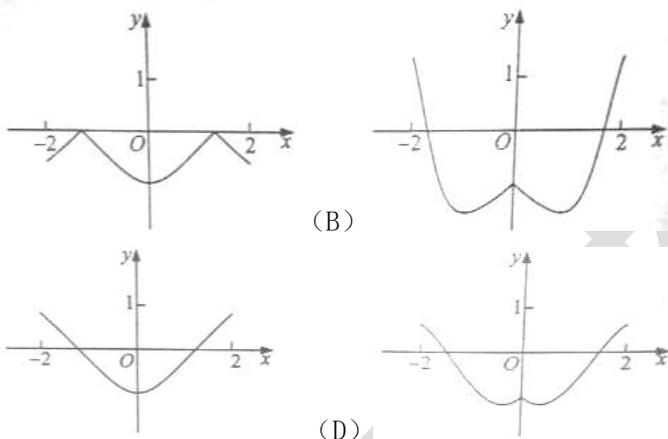


- (A) 17π (B) 18π (C) 20π (D) 28π

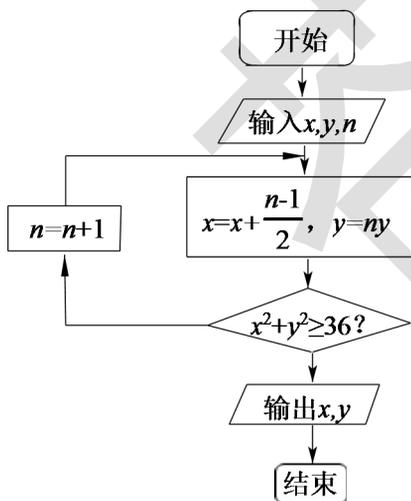
(8) 若 $a > b > 0, 0 < c < 1$, 则

- (A) $\log_a c < \log_b c$ (B) $\log_c a < \log_c b$ (C) $a^c < b^c$ (D) $c^a > c^b$

(9) 函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 的图像大致为



(10) 执行右面的程序框图, 如果输入的 $x = 0, y = 1, n = 1$, 则输出 x, y 的值满足



- (A) $y = 2x$
 (B) $y = 3x$
 (C) $y = 4x$

(D) $y = 5x$

(11) 平面 α 过正文体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A , $\alpha //$ 平面 CB_1D_1 , $\alpha \cap$ 平面 $ABCD = m$,

$\alpha \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = n$, 则 m, n 所成角的正弦值为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

(12) 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是

- (A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, \frac{1}{3}]$ (C) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (D) $[-1, -\frac{1}{3}]$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 (13) ~ (21) 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 (22) ~ (24) 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分

(13) 设向量 $\mathbf{a} = (x, x+1)$, $\mathbf{b} = (1, 2)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $x =$ _____

(14) 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$, 则 $\tan(\theta - \frac{\pi}{4}) =$ _____.

(15) 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为 _____

(16) 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg, 乙材料 1kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg, 乙材料 0.3kg, 用 3 个工时, 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150kg, 乙材料 90kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为 _____ 元.

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

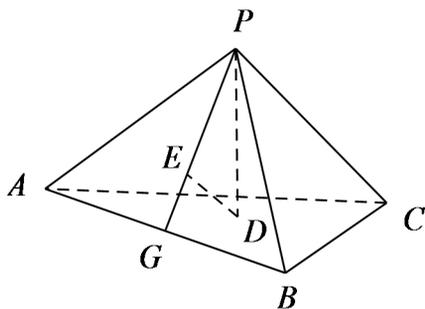
已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}, a_n b_{n+1} + b_{n+1} = n b_n, \dots$

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. (本题满分 12 分)

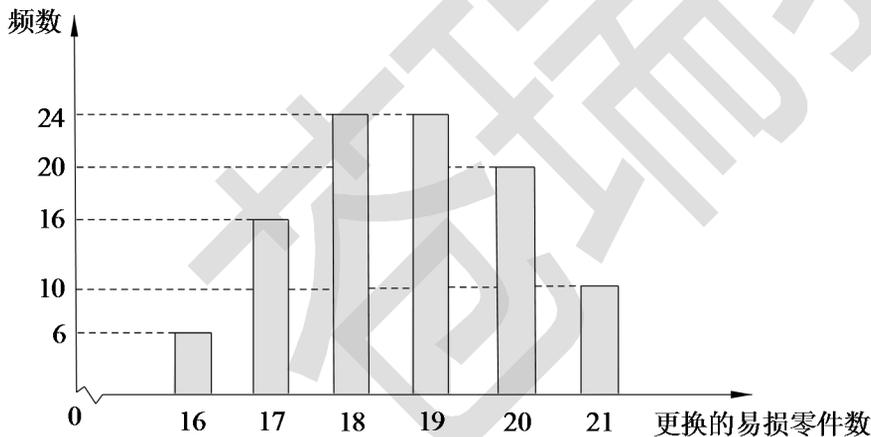
如图，在已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是直角三角形， $PA=6$ ，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D ， D 在平面 PAB 内的正投影为点 E ，连接 PE 并延长交 AB 于点 G 。学科&网



- (I) 证明： G 是 AB 的中点；
 (II) 在答题卡第 (18) 题图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F (说明作法及理由)，并求四面体 $PDEF$ 的体积。

(19) (本小题满分 12 分)

某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰。机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元。在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元。现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数， y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用 (单位：元)， n 表示购机的同时购买的易损零件数。

- (I) 若 $n=19$ ，求 y 与 x 的函数解析式；
 (II) 若要求学科&网“需更换的易损零件数不大于 n ”的频率不小于 0.5，求 n 的最小值；
 (III) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件。

件? 学科&网

(20) (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=t (t \neq 0)$ 交 y 轴于点 M , 交抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 于点 P , M 关于点 P 的对称点为 N , 连结 ON 并延长交 C 于点 H .

(I) 求 $\frac{|OH|}{|ON|}$;

(II) 除 H 以外, 直线 MH 与 C 是否有其它公共点? 说明理由.

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

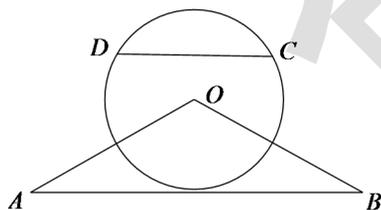
请考生在 22、23、24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请写清题号

(22) (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, $\triangle OAB$ 是等腰三角形, $\angle AOB = 120^\circ$. 以 O 为圆心, $\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

(I) 证明: 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

(II) 点 C, D 在 $\odot O$ 上, 且 A, B, C, D 四点共圆, 证明: $AB \parallel CD$.



(23) (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直线坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = 1 + a \sin t, \end{cases}$ (t 为参数, $a > 0$)。在以坐标原点为极点, x 轴正半轴

为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 4 \cos \theta$.

(I) 说明 C_1 是哪种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;

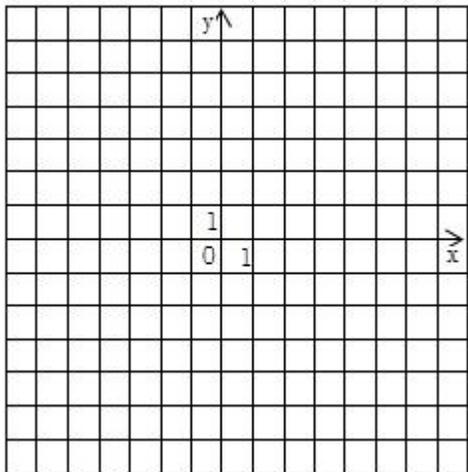
(II) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \alpha_0$ ，其中 α_0 满足 $\tan \alpha_0 = 2$ ，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a 。

(24) (本小题满分 10 分)，选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - |2x-3|$ 。学科&网

(I) 在答题卡第 (24) 题图中画出 $y = f(x)$ 的图像；

(II) 求不等式 $|f(x)| > 1$ 的解集。



2016 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学参考答案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (1) B (2) A (3) C (4) D (5) B (6) D
 (7) A (8) B (9) D (10) C (11) A (12) C

第 II 卷

二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分。

(13) $-\frac{2}{3}$ (14) $-\frac{4}{3}$ (15) 4π (16) 216000

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (I) 由已知， $a_1b_2 + b_2 = b_1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}$ ，得 $a_1b_2 + b_2 = b_1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}$ ，得 $a_1 = 2$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，

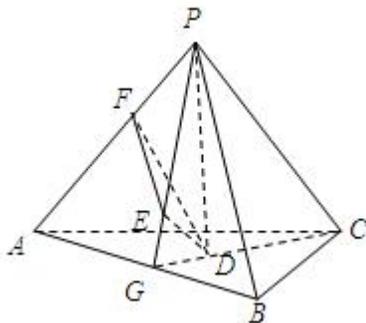
公差为 3 的等差数列，通项公式为 $a_n = 3n - 1$. 学科&网

(II) 由 (I) 和 $a_nb_{n+1} + b_{n+1} = nb_n$ ，得 $b_{n+1} = \frac{b_n}{3}$ ，因此 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. 记 $\{b_n\}$ 的前 n

项和为 S_n ，则

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.$$

(18) (I) 因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D ，所以 $AB \perp PD$.



因为 D 在平面 PAB 内的正投影为 E ，所以 $AB \perp DE$.

所以 $AB \perp$ 平面 PED ，故 $AB \perp PG$.

又由已知可得， $PA = PB$ ，从而 G 是 AB 的中点.

(II) 在平面 PAB 内，过点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F ， F 即为 E 在平面 PAC 内的正投影.

理由如下：由已知可得 $PB \perp PA$ ， $PB \perp PC$ ，又 $EF \parallel PB$ ，所以 $EF \perp PC$ ，因此 $EF \perp$ 平面 PAC ，即点 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影. 学科&网

连接 CG ，因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D ，所以 D 是正三角形 ABC 的中心.

由 (I) 知， G 是 AB 的中点，所以 D 在 CG 上，故 $CD = \frac{2}{3}CG$.

由题设可得 $PC \perp$ 平面 PAB ， $DE \perp$ 平面 PAB ，所以 $DE \parallel PC$ ，因此 $PE = \frac{2}{3}PG, DE = \frac{1}{3}PC$.

由已知，正三棱锥的侧面是直角三角形且 $PA = 6$ ，可得 $DE = 2, PE = 2\sqrt{2}$.

在等腰直角三角形 $EF P$ 中, 可得 $EF = PF = 2$.

所以四面体 $PDEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$.

- (19) (I) 分 $x \leq 19$ 及 $x > 19$, 分别求解析式; (II) 通过频率大小进行比较; (III) 分别求出您 9, $n=20$ 的所需费用的平均数来确定。

试题解析: (I) 当 $x \leq 19$ 时, $y = 3800$; 当 $x > 19$ 时, $y = 3800 + 500(x - 19) = 500x - 5700$, 所以 y 与 x

的函数解析式为 $y = \begin{cases} 3800, & x \leq 19, \\ 500x - 5700, & x > 19, \end{cases} (x \in N)$.

(II) 由柱状图知, 需更换的零件数不大于 18 的概率为 0.46, 不大于 19 的概率为 0.7, 故 n 的最小值为 19.

(III) 若每台机器在购机同时都购买 19 个易损零件, 则这 100 台机器中有 70 台在购买易损零件上的费用为 3800, 20 台的费用为 4300, 10 台的费用为 4800, 因此这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数为

$$\frac{1}{100}(4000 \times 90 + 4500 \times 10) = 4050.$$

比较两个平均数可知, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个易损零件.

- (20) (I) 由已知得 $M(0, t)$, $P(\frac{t^2}{2p}, t)$.

又 N 为 M 关于点 P 的对称点, 故 $N(\frac{t^2}{p}, t)$, ON 的方程为 $y = \frac{p}{t}x$, 代入 $y^2 = 2px$ 整理得 $px^2 - 2t^2x = 0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2t^2}{p}$, 因此 $H(\frac{2t^2}{p}, 2t)$.

所以 N 为 OH 的中点, 即 $\frac{|OH|}{|ON|} = 2$.

(II) 直线 MH 与 C 除 H 以外没有其它公共点. 理由如下:

直线 MH 的方程为 $y - t = \frac{p}{2t}x$, 即 $x = \frac{2t}{p}(y - t)$. 代入 $y^2 = 2px$ 得 $y^2 - 4ty + 4t^2 = 0$, 解得 $y_1 = y_2 = 2t$, 即

直线 MH 与 C 只有一个公共点, 所以除 H 以外直线 MH 与 C 没有其它公共点.

- (21) (I) $f'(x) = (x-1)e^x + 2a(x-1) = (x-1)(e^x + 2a)$.

(i) 设 $a \geq 0$, 则当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. 学科&网

(ii) 设 $a < 0$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

①若 $a = -\frac{e}{2}$, 则 $f'(x) = (x-1)(e^x - e)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

②若 $a > -\frac{e}{2}$, 则 $\ln(-2a) < 1$, 故当 $x \in (-\infty, \ln(-2a)) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (\ln(-2a), 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-2a)), (1, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\ln(-2a), 1)$ 单调递减.

③若 $a < -\frac{e}{2}$, 则 $\ln(-2a) > 1$, 故当 $x \in (-\infty, 1) \cup (\ln(-2a), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (1, \ln(-2a))$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (\ln(-2a), +\infty)$ 单调递增, 在 $(1, \ln(-2a))$ 单调递减.

(II) (i) 设 $a > 0$, 则由(I)知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

又 $f(1) = -e, f(2) = a$, 取 b 满足 $b < 0$ 且 $\frac{b}{2} < \ln \frac{a}{2}$,

则 $f(b) > \frac{a}{2}(b-2) + a(b-1)^2 = a\left(b^3 - \frac{3}{2}b\right) > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个零点.

(ii) 设 $a=0$, 则 $f(x) = (x-2)e^x$ 所以 $f(x)$ 有一个零点.

(iii) 设 $a < 0$, 若 $a \geq -\frac{e}{2}$, 则由(I)知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

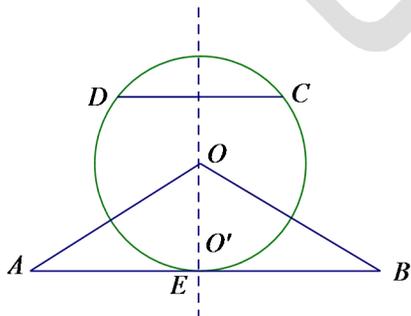
又当 $x \leq 1$ 时, $f(x) < 0$, 故 $f(x)$ 不存在两个零点; 若 $a < -\frac{e}{2}$, 则由(I)知, $f(x)$ 在 $(1, \ln(-2a))$ 单调递减, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 单调递增. 又当 $x \leq 1$ 时 $f(x) < 0$, 故 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

(22) (I) 设 E 是 AB 的中点, 连结 OE ,

因为 $OA = OB, \angle AOB = 120^\circ$, 所以 $OE \perp AB, \angle AOE = 60^\circ$.

在 $Rt\triangle AOE$ 中, $OE = \frac{1}{2}AO$, 即 O 到直线 AB 的距离等于圆 O 的半径, 所以直线 AB 与 $\odot O$ 相切.



(II) 因为 $OA = 2OD$, 所以 O 不是 A, B, C, D 四点所在圆的圆心, 设 O' 是 A, B, C, D 四点所在圆的圆心, 作直线 OO' . 学科&网

由已知得 O 在线段 AB 的垂直平分线上，又 O' 在线段 AB 的垂直平分线上，所以 $OO' \perp AB$ 。

同理可证， $OO' \perp CD$ 。所以 $AB \parallel CD$ 。

$$(23) (1) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = 1 + a \sin t \end{cases} \quad (t \text{ 均为参数})$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = a^2 \quad ①$$

$\therefore C_1$ 为以 $(0, 1)$ 为圆心， a 为半径的圆。方程为 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 = \rho^2, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\therefore \rho^2 - 2\rho \sin \theta + 1 - a^2 = 0 \quad \text{即为 } C_1 \text{ 的极坐标方程}$$

$$(2) C_2: \rho = 4 \cos \theta$$

两边同乘 ρ 得 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta \quad \therefore \rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rho \cos \theta = x$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4x$$

$$\text{即 } (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad ②$$

C_3 : 化为普通方程为 $y = 2x$

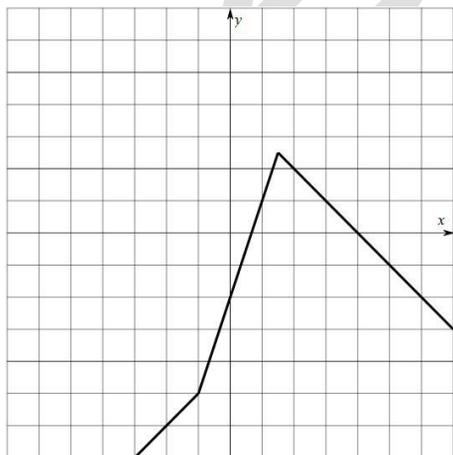
由题意： C_1 和 C_2 的公共方程所在直线即为 C_3

$$① - ② \text{ 得: } 4x - 2y + 1 - a^2 = 0, \quad \text{即为 } C_3$$

$$\therefore 1 - a^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

(24) (1) 如图所示:



$$(2) f(x) = \begin{cases} x-4, & x \leq -1 \\ 3x-2, & -1 < x < \frac{3}{2} \\ 4-x, & x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|f(x)| > 1$$

当 $x \leq -1$, $|x-4| > 1$, 解得 $x > 5$ 或 $x < 3$

$$\therefore x \leq -1$$

当 $-1 < x < \frac{3}{2}$, $|3x-2| > 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{3}$

$$\therefore -1 < x < \frac{1}{3} \text{ 或 } 1 < x < \frac{3}{2}$$

当 $x \geq \frac{3}{2}$, $|4-x| > 1$, 解得 $x > 5$ 或 $x < 3$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq x < 3 \text{ 或 } x > 5$$

综上, $x < \frac{1}{3}$ 或 $1 < x < 3$ 或 $x > 5$

$$\therefore |f(x)| > 1, \text{ 解集为 } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, 3) \cup (5, +\infty)$$