2017 年普通高等学校招生全国统一考试（全国 I 卷）

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|3^x<1\}$，则（）

A．$A\cap B=\{x|x<0\}$　　B．$A\cup B=\mathbf{R}$

C．$A\cup B=\{x|x>1\}$　　D．$A\cap B=\varnothing$

【答案】A

【解析】$A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|3^x<1\}=\{x|x<0\}$

$\therefore A\cap B=\{x|x<0\}$，$A\cup B=\{x|x<1\}$，

选 A

2. 如图，正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图.正方形内切圆中的黑色部分和白色部分位于正方形的中心成中心对称，在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是（）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\pi}{8}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

【答案】B

【解析】设正方形边长为 2，则圆半径为 1

则正方形的面积为 $2\times2=4$，圆的面积为 $\pi\times1^2=\pi$，图中黑色部分的概率为 $\frac{\pi}{2}$

则此点取自黑色部分的概率为 $\frac{\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{\pi}{8}$

故选 B

3. 设有下面四个命题（）

p_1：若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$；

p_2：若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$，则 $z\in\mathbf{R}$；

p_3：若复数 z_1，z_2 满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$，则 $z_1=\overline{z_2}$；

p_4：若复数 $z\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$．

A．p_1，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_2，p_3　　D．p_2，p_4

【答案】B

【解析】p_1：设 $z=a+bi$，则 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，得到 $b=0$，所以 $z\in\mathbf{R}$.故 P_1 正确；

p_2：若 $z^2=-1$，满足 $z^2\in\mathbf{R}$，而 $z=i$，不满足 $z^2\in\mathbf{R}$，故 p_2 不正确；

p_3：若 $z_1=1$，$z_2=2$，则 $z_1z_2=2$，满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$，而它们实部不相等，不是共轭复数，故 p_3 不正确；

p_4：实数没有虚部，所以它的共轭复数是它本身，也属于实数，故 p_4 正确；

4．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为（）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】C

【解析】$a_4+a_5=a_1+3d+a_1+4d=24$

$S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=48$

联立求得 $\begin{cases}2a_1+7d=24 & ①\\ 6a_1+15d=48 & ②\end{cases}$

$①\times3-②$ 得 $(21-15)d=24$

$6d=24$

$\therefore d=4$

选 C

5．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant1$ 的 x 的取值范围是（）

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

【答案】D

【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)=1$，

于是 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant1$ 等价于 $f(1)\leqslant f(x-2)\leqslant f(-1)$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减

$\therefore -1\leqslant x-2\leqslant1$

$\therefore 1\leqslant x\leqslant3$

故选 D

6．$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为

A．15　　B．20　　C．30　　D．35

【答案】C.

【解析】$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6=1\cdot(1+x)^6+\frac{1}{x^2}\cdot(1+x)^6$

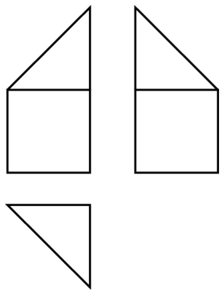
对$(1+x)^6$的x^2项系数为$C_6^2=\frac{6\times5}{2}=15$

对$\frac{1}{x^2}\cdot(1+x)^6$的$x^2$项系数为$C_6^4$=15，

∴x^2的系数为$15+15=30$

故选C

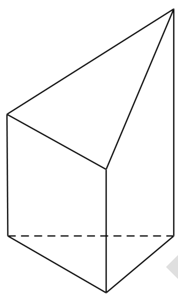
7. 某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为2，俯视图为等腰直角三角形、该多面体的各个面中有若干是梯形，这些梯形的面积之和为



A．10　　B．12　　C．14　　D．16

【答案】B

【解析】由三视图可画出立体图



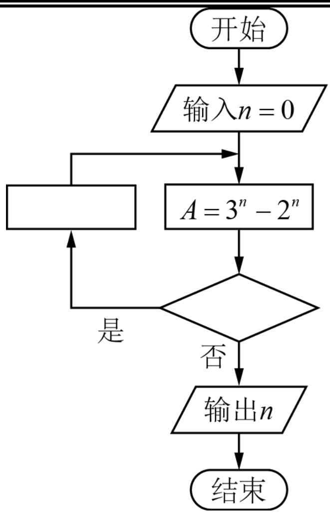
该立体图平面内只有两个相同的梯形的面

$S_{梯}=(2+4)\times2\div2=6$

$S_{全梯}=6\times2=12$

故选B

8. 右面程序框图是为了求出满足$3^n-2^n>1000$的最小偶数n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入



A. $A>1000$ 和 $n=n+1$　　　　B. $A>1000$ 和 $n=n+2$

C. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$　　　　D. $A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

【答案】D

【答案】因为要求A大于1000时输出，且框图中在“否”时输出

$\therefore$ “　”中不能输入 $A>1000$

排除A、B

又要求 n 为偶数，且 n 初始值为0，

“　”中 n 依次加2可保证其为偶

故选D

9. 已知曲线 $C_1:y=\cos x$，$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确的是（）

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的2倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

【答案】D

【解析】$C_1:y=\cos x$，$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

首先曲线 C_1、C_2 统一为一三角函数名，可将 $C_1:y=\cos x$ 用诱导公式处理．

$y=\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$．横坐标变换需将 $\omega=1$ 变成 $\omega=2$，

即 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\xrightarrow{C_1\text{上各点横坐标缩短它原来}\frac{1}{2}}y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\longrightarrow y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

注意ω的系数，在右平移需将$\omega=2$提到括号外面，这时$x+\dfrac{\pi}{4}$平移至$x+\dfrac{\pi}{3}$，

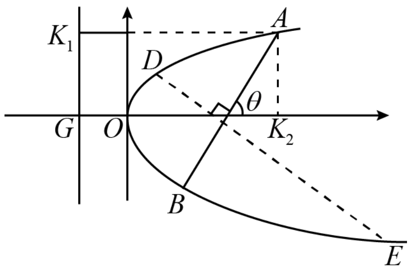
根据“左加右减”原则，“$x+\dfrac{\pi}{4}$”到“$x+\dfrac{\pi}{3}$”需加上$\dfrac{\pi}{12}$，即再向左平移$\dfrac{\pi}{12}$.

10. 已知F为抛物线C：$y^2=4x$的交点，过F作两条互相垂直l_1，l_2，直线l_1与C交于A、B两点，直线l_2与C交于D，E两点，$|AB|+|DE|$的最小值为（）

A．16　　B．14　　C．12　　D．10

【答案】A

【解析】



设AB倾斜角为θ．作AK_1垂直准线，AK_2垂直x轴

易知$\begin{cases}|AF|\cdot\cos\theta+|GF|=|AK_1| \text{（几何关系）}\\ |AK_1|=|AF| \text{（抛物线特性）}\\ |GP|=\dfrac{P}{2}-\left(-\dfrac{P}{2}\right)=P\end{cases}$

$\therefore |AF|\cdot\cos\theta+P=|AF|$

同理$|AF|=\dfrac{P}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{P}{1+\cos\theta}$

$\therefore |AB|=\dfrac{2P}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2P}{\sin^2\theta}$

又DE与AB垂直，即DE的倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$|DE|=\dfrac{2P}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{2P}{\cos^2\theta}$

而$y^2=4x$，即$P=2$．

$\therefore |AB|+|DE|=2P\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)=4\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta}$

$=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}\geqslant 16$，当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$取等号

即$|AB|+|DE|$最小值为16，故选A

11. 设x，y，z为正数，且$2^x=3^y=5^z$，则（）

A．$2x<3y<5z$　　B．$5z<2x<3y$　　C．$3y<5z<2x$　　D．$3y<2x<5z$

【答案】D

【答案】取对数：$x\ln2=y\ln3=\ln5$．

$\frac{x}{y}=\frac{\ln3}{\ln2}>\frac{3}{2}$

$\therefore 2x>3y$

$x\ln2=z\ln5$

则$\frac{x}{z}=\frac{\ln5}{\ln2}<\frac{5}{2}$

$\therefore 2x<5z$ $\therefore 3y<2x<5z$，故选D

12. 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件，为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动，这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列$1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,\cdots$，其中第一项是$2^0$，接下来的两项是$2^0$，$2^1$，在接下来的三项式$2^6$，$2^1$，$2^2$，依次类推，求满足如下条件的最小整数$N$：$N>100$且该数列的前$N$项和为2的整数幂．那么该款软件的激活码是（　　）

A．440　　B．330　　C．220　　D．110

【答案】A

【解析】设首项为第1组，接下来两项为第2组，再接下来三项为第3组，以此类推．

设第n组的项数为n，则n组的项数和为$\frac{n(1+n)}{2}$

由题，$N>100$，令$\frac{n(1+n)}{2}>100\to n\geqslant14$且$n\in\mathbf{N}^*$，即$N$出现在第13组之后

第n组的和为$\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

n组总共的和为$\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^n-2-n$

若要使前N项和为2的整数幂，则$N-\frac{n(1+n)}{2}$项的和2^k-1应与$-2-n$互为相反数

即$2^k-1=2+n\left(k\in\mathbf{N}^*，n\geqslant14\right)$

$k=\log_2(n+3)$

$\to n=29$，$k=5$

则$N=\frac{29\times(1+29)}{2}+5=440$

故选A

二、 填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$________．

【答案】$2\sqrt{3}$

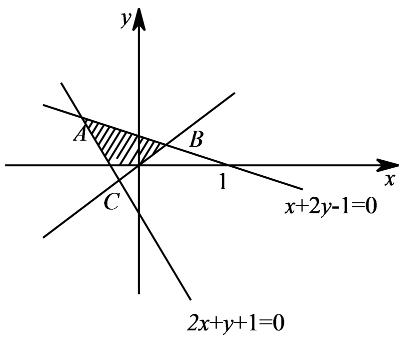
【解析】$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+2\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{2b}\right|\cdot\cos 60^\circ+\left(2\left|\vec{b}\right|\right)^2=2^2+2\times2\times2\times\frac{1}{2}+2^2=4+4+4=12$

$\therefore \left|\vec{a}+\overrightarrow{2b}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

14. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\le 1\\2x+y\ge -1\\x-y\le 0\end{cases}$，则 $z=3x-2y$ 的最小值为_______.

【答案】-5

不等式组 $\begin{cases}x+2y\le 1\\2x+y\ge -1\\x-y\le 0\end{cases}$ 表示的平面区域如图所示



由 $z=3x-2y$ 得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$，

求 z 的最小值，即求直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 的纵截距的最大值

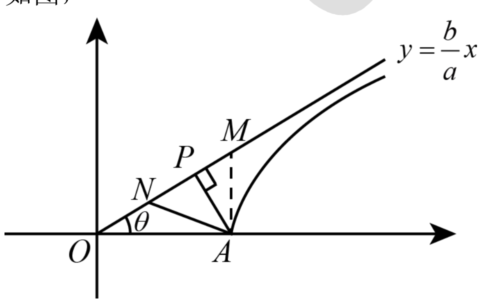
当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 过图中点 A 时，纵截距最大

由 $\begin{cases}2x+y=-1\\x+2y=1\end{cases}$ 解得 A 点坐标为 $(-1,1)$，此时 $z=3\times(-1)-2\times1=-5$

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，（$a>0$，$b>0$）的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M，N 两点，若 $\angle MAN=60^\circ$，则 C 的离心率为_______.

【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】如图，



$|OA|=a$，$|AN|=|AM|=b$

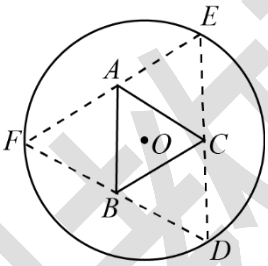
$\because \angle MAN=60^\circ$，$\therefore |AP|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$|OP|=\sqrt{|OA|^2-|PA|^2}=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{|AP|}{|OP|} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2}}$

又$\because \tan\theta = \dfrac{b}{a}$，$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}b^2}} = \dfrac{b}{a}$，解得 $a^2 = 3b^2$

$\therefore e = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

16. 如图，圆形纸片的圆心为O，半径为5 cm，该纸片上的等边三角形ABC的中心为O，D、E、F为元O上的点，$\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$分别是一BC，CA，AB为底边的等腰三角形，沿虚线剪开后，分别以BC，CA，AB为折痕折起$\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$，使得D，E，F重合，得到三棱锥．当$\triangle ABC$的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为________．



【答案】$4\sqrt{15}$

【解析】由题，连接OD，交BC与点G，由题，$OD \perp BC$

$OG = \dfrac{\sqrt{3}}{6}BC$，即$OG$的长度与$BC$的长度或成正比

设$OG = x$，则$BC = 2\sqrt{3}x$，$DG = 5 - x$

三棱锥的高$h = \sqrt{DG^2 - OG^2} = \sqrt{25 - 10x + x^2 - x} = \sqrt{25 - 10x}$

$S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \cdot 3x \cdot \dfrac{1}{2} = 3\sqrt{3}x^2$

则$V = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \sqrt{3}x^2 \cdot \sqrt{25 - 10x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25x^4 - 10x^5}$

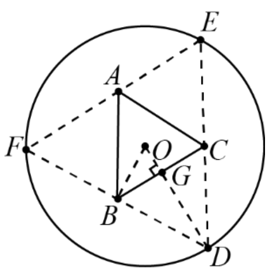
令$f(x) = 25x^4 - 10x^5$，$x \in (0, \dfrac{5}{2})$，$f'(x) = 100x^3 - 50x^4$

令$f'(x) > 0$，即$x^4 - 2x^3 < 0$，$x < 2$

则$f(x) \leqslant f(2) = 80$

则$V \leqslant \sqrt{3} \times \sqrt{80} = 45$

$\therefore$体积最大值为$4\sqrt{15}\,\mathrm{cm}^3$



三、 解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2}{3\sin A}$.

（1）求 $\sin B\sin C$；

（2）若 $6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【解析】本题主要考查三角函数及其变换，正弦定理，余弦定理等基础知识的综合应用.

（1）∵ $\triangle ABC$ 面积 $S=\dfrac{a^2}{3\sin A}$.且 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

∴ $\dfrac{a^2}{3\sin A}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

∴ $a^2=\dfrac{3}{2}bc\sin^2 A$

∵由正弦定理得 $\sin^2 A=\dfrac{3}{2}\sin B\sin C\sin^2 A$，

由 $\sin A\neq 0$ 得 $\sin B\sin C=\dfrac{2}{3}$.

（2）由（1）得 $\sin B\sin C=\dfrac{2}{3}$，$\cos B\cos C=\dfrac{1}{6}$

∵ $A+B+C=\pi$

∴ $\cos A=\cos(\pi-B-C)=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C=\dfrac{1}{2}$

又∵ $A\in(0,\pi)$

∴ $A=60^\circ$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\dfrac{1}{2}$

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=9$　①

由正弦定理得 $b=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin B$，$c=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin C$

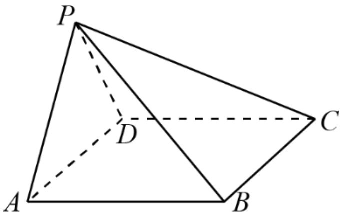
∴ $bc=\dfrac{a^2}{\sin^2 A}\cdot\sin B\sin C=8$　②

由①②得 $b+c=\sqrt{33}$

∴ $a+b+c=3+\sqrt{33}$，即 $\triangle ABC$ 周长为 $3+\sqrt{33}$

18. （12 分）

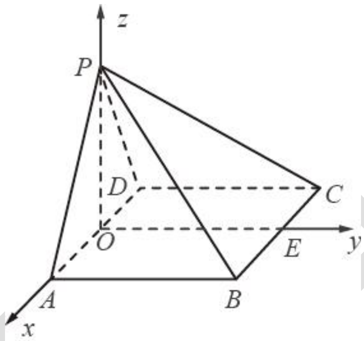
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB \parallel CD$ 中，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$．



（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（2）若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值．

【解析】（1）证明：$\because \angle BAP=\angle CDP=90^\circ$



$\therefore PA\perp AB$，$PD\perp CD$

又$\because AB\parallel CD$，$\therefore PD\perp AB$

又$\because PD\cap PA=P$，PD、$PA\subset$ 平面 PAD

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，又 $AB\subset$ 平面 PAB

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD

（2）取 AD 中点 O，BC 中点 E，连接 PO，OE

$\because AB \underline{\underline{\parallel}} CD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$\therefore OE \underline{\underline{\parallel}} AB$

由（1）知，$AB\perp$ 平面 PAD

$\therefore OE\perp$ 平面 PAD，又 PO、$AD\subset$ 平面 PAD

$\therefore OE\perp PO$，$OE\perp AD$

又$\because PA=PD$，$\therefore PO\perp AD$

$\therefore PO$、OE、AD 两两垂直

$\therefore$ 以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$

设 $PA=2$，$\therefore D\left(-\sqrt{2},0,0\right)$、$B\left(\sqrt{2},2,0\right)$、$P\left(0,0,\sqrt{2}\right)$、$C\left(-\sqrt{2},2,0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{PD}=\left(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$、$\overrightarrow{PB}=\left(\sqrt{2},2,-\sqrt{2}\right)$、$\overrightarrow{BC}=\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 PBC 的法向量

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{2}x+2y-\sqrt{2}z=0\\ -2\sqrt{2}x=0\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=\sqrt{2}$，$x=0$，可得平面 PBC 的一个法向量 $\vec{n}=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$

$\because \angle APD=90^\circ$，$\therefore PD\perp PA$

又知 $AB\perp$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD

$\therefore PD\perp AB$，又 $PA\cap AB=A$

$\therefore PD\perp$ 平面 PAB

即 $\overrightarrow{PD}$ 是平面 PAB 的一个法向量，$\overrightarrow{PD}=\left(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)$

$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{PD},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

由图知二面角 $A-PB-C$ 为钝角，所以它的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19. （12 分）

为了抽检某种零件的一条生产线的生产过程，实验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单

位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$．

（1）假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\geqslant1)$ 及 X 的数学期望；

（2）一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查．

（I）试说明上述监控生产过程方法的合理性：

（II）下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx0.212$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1, 2, \cdots, 16$．

用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查，剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ（精确到 0.01）．

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$．

$0.9974^{16}\approx0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx0.09$．

【解析】（1）由题可知尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之内的概率为 0.9974，落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026．

$P(X=0)=C_{16}^{0}(1-0.9974)^0\,0.9974^{16}\approx0.9592$

$P(X\geq1)=1-P(X=0)\approx1-0.9592=0.0408$

由题可知 $X\sim B(16, 0.0026)$

$\therefore E(X)=16\times0.0026=0.0416$

（2）（i）尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026，

由正态分布知尺寸落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外为小概率事件，

因此上述监控生产过程的方法合理．

（ii）

$\mu-3\sigma=9.97-3\times0.212=9.334$

$\mu+3\sigma=9.97+3\times0.212=10.606$

$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)=(9.334, 10.606)$

$\because 9.22\notin(9.334, 10.606)$，$\therefore$ 需对当天的生产过程检查．

因此剔除 9.22

剔除数据之后：$\mu=\frac{9.97\times16-9.22}{15}=10.02$．

$$\begin{aligned}\sigma^2=[&(9.95-10.02)^2+(10.12-10.02)^2+(9.96-10.02)^2+(9.96-10.02)^2+(10.01-10.02)^2\\&+(9.92-10.02)^2+(9.98-10.02)^2+(10.04-10.02)^2+(10.26-10.02)^2+(9.91-10.02)^2\\&+(10.13-10.02)^2+(10.02-10.02)^2+(10.04-10.02)^2+(10.05-10.02)^2+(9.95-10.02)^2]\times\frac{1}{15}\\&\approx0.008\end{aligned}$$

$\therefore \sigma=\sqrt{0.008}\approx0.09$

20. （12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$中恰有三点在椭圆 C 上．

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A、B 两点，若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点．

【解析】（1）根据椭圆对称性，必过 P_3、P_4

又 P_4 横坐标为 1，椭圆必不过 P_1，所以过 P_2，P_3，P_4 三点

将 $P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$代入椭圆方程得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{4}}{b^2}=1\end{cases}，解得\ a^2=4，\ b^2=1$$

∴椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

（2）①当斜率不存在时，设 $l:x=m$，$A(m,y_A)$，$B(m,-y_A)$

$$k_{P_2A}+k_{P_2B}=\frac{y_A-1}{m}+\frac{-y_A-1}{m}=\frac{-2}{m}=-1$$

得 $m=2$，此时 l 过椭圆右顶点，不存在两个交点，故不满足．

②当斜率存在时，设 l∶$y=kx+b\ (b\neq 1)$

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y=kx+b\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，整理得 $(1+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-4=0$

$$x_1+x_2=\frac{-8kb}{1+4k^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{4b^2-4}{1+4k^2}$$

则 $k_{P_2A}+k_{P_2B}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{x_2(kx_1+b)-x_2+x_1(kx_2+b)-x_1}{x_1x_2}$

$$=\frac{\dfrac{8kb^2-8k-8kb^2+8kb}{1+4k^2}}{\dfrac{4b^2-4}{1+4k^2}}$$

$$=\frac{8k(b-1)}{4(b+1)(b-1)}=-1，\ 又\ b\neq 1$$

$\Rightarrow b=-2k-1$，此时 $\Delta=-64k$，存在 k 使得 $\Delta>0$ 成立．

∴直线 l 的方程为 $y=kx-2k-1$

当 $x=2$ 时，$y=-1$

所以 l 过定点 $(2,-1)$．

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^{x}-x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

【解析】（1）由于 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^{x}-x$

故 $f'(x)=2a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^{x}-1=(a\mathrm{e}^{x}-1)(2\mathrm{e}^{x}+1)$

①当 $a\le 0$ 时，$a\mathrm{e}^{x}-1<0$，$2\mathrm{e}^{x}+1>0$．从而 $f'(x)<0$ 恒成立．

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，从而 $a\mathrm{e}^{x}-1=0$，得 $x=-\ln a$．

x	$(-\infty,-\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调减	极小值	单调增

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增

（2）由（1）知，

当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多一个零点，不满足条件．

当 $a>0$ 时，$f_{\min}=f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$．

令 $g(a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$．

令 $g(a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a\,(a>0)$，则 $g'(a)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}>0$．从而 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，而 $g(1)=0$．故当 $0<a<1$ 时，$g(a)<0$．当 $a=1$ 时 $g(a)=0$．当 $a>1$ 时 $g(a)>0$

若 $a>1$，则 $f_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a=g(a)>0$，故 $f(x)>0$ 恒成立，从而 $f(x)$ 无零点，不满足条件．

若 $a=1$，则 $f_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a=0$，故 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=-\ln a=0$，不满足条件．

若 $0<a<1$，则 $f_{\min}=1-\dfrac{1}{a}+\ln a<0$，注意到 $-\ln a>0$．$f(-1)=\dfrac{a}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{a}{\mathrm{e}}+1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}>0$．

故 $f(x)$ 在 $(-1,-\ln a)$ 上有一个实根，而又 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)>\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a$．

且

$$f\left(\ln(\frac{3}{a}-1)\right)=\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)}\left(a\cdot\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)}+a-2\right)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$$

$$=\left(\frac{3}{a}-1\right)\cdot(3-a+a-2)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)=\left(\frac{3}{a}-1\right)-\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>0.$$

故 $f(x)$ 在 $\left(-\ln a,\ \ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)\right)$ 上有一个实根．

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调增，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多两个实根．

又 $f(x)$ 在 $(-1,-\ln a)$ 及 $\left(-\ln a,\ \ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)\right)$ 上均至少有一个实数根，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恰有两个实根．

综上，$0<a<1$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参考方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+4t, \\ y=1-t, \end{cases}$（$t$ 为参数）．

（1）若 $a=-1$，求 C 与 l 的交点坐标；

（2）若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$，求 a．

【解析】（1）$a=-1$ 时，直线 l 的方程为 $x+4y-3=0$．

曲线 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

联立方程 $\begin{cases} x+4y-3=0 \\ \frac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{21}{25} \\ y=\frac{24}{25} \end{cases}$，

则 C 与 l 交点坐标是 $(3，0)$ 和 $\left(-\frac{21}{25}，\frac{24}{25}\right)$

（2）直线 l 一般式方程是 $x+4y-4-a=0$．

设曲线 C 上点 $p(3\cos\theta，\sin\theta)$．

则 P 到 l 距离 $d=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-4-a|}{\sqrt{17}}=\frac{|5\sin(\theta+\varphi)-4-a|}{\sqrt{17}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$．

依题意得：$d_{max}=\sqrt{17}$，解得 $a=-16$ 或 $a=8$

23．[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f\left(x\right)=-x^2+ax+4$，$g\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x-1\right|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f\left(x\right)\geqslant g\left(x\right)$ 的解集；

（2）若不等式 $f\left(x\right)\geqslant g\left(x\right)$ 的解集包含 $\left[-1,1\right]$，求 a 的取值范围.

【解析】（1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=-x^2+x+4$，是开口向下，对称轴 $x=\dfrac{1}{2}$ 的二次函数.

$$g\left(x\right)=\left|x+1\right|+\left|x-1\right|=\begin{cases}2x，x>1\\ 2，-1\leqslant x\leqslant 1，\\ -2x，x<-1\end{cases}$$

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，令 $-x^2+x+4=2x$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$

$g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减

∴此时 $f\left(x\right)\geqslant g\left(x\right)$ 解集为 $\left(1,\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

当 $x\in\left[-1,1\right]$ 时，$g\left(x\right)=2$，$f\left(x\right)\geqslant f\left(-1\right)=2$.

当 $x\in\left(-\infty,-1\right)$ 时，$g\left(x\right)$ 单调递减，$f\left(x\right)$ 单调递增，且 $g\left(-1\right)=f\left(-1\right)=2$.

综上所述，$f\left(x\right)\geqslant g\left(x\right)$ 解集 $\left[-1,\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

（2）依题意得：$-x^2+ax+4\geqslant 2$ 在 $\left[-1,1\right]$ 恒成立.

即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 在 $\left[-1,1\right]$ 恒成立.

则只须 $\begin{cases}1^2-a\cdot 1-2\leqslant 0\\ \left(-1\right)^2-a\left(-1\right)-2\leqslant 0\end{cases}$，解出：$-1\leqslant a\leqslant 1$.

故 a 取值范围是 $\left[-1,1\right]$.